

Dimension topologique, moyenne dimension et théorèmes de plongements

Fanny Amyot

Mémoire de Master 2, préparé sous la direction de Yonatan Gutman,
co-dirigé par David Burguet

23 février 2017

Résumé

La rédaction de ce mémoire est basée principalement sur la lecture des deux articles [LW00] et [Gut14]. Il s'agissait d'appréhender la moyenne dimension topologique et de comprendre l'intérêt de cette notion, notamment dans l'étude de théorèmes de plongements. J'ai dû me documenter préalablement sur la dimension topologique, et j'y consacre donc la première partie du mémoire. Dans la seconde, on introduit la notion de moyenne dimension topologique et dans la dernière, on étudie plusieurs cas particuliers de la conjecture de Lindenstrauss-Tsukamoto.

Je remercie Yonatan Gutman pour cette introduction à ce sujet et à la recherche en général, et pour sa disponibilité malgré la distance. Je remercie aussi David Burguet pour les discussions que nous avons eues et pour avoir co-dirigé mon master, et Frédéric Le Roux pour bien avoir voulu faire partie du jury lors de la soutenance.

Table des matières

1	Dimension topologique	2
1.1	Définition	2
1.2	Premières propriétés	3
1.3	Dimension topologique des polyèdres	4
1.3.1	Polyèdres	5
1.3.2	Lemme de Lebesgue	6
1.3.3	Applications α -compatibles	8
1.4	Plongements topologiques	10
2	Moyenne dimension topologique	13
2.1	Généralités	13

2.2	Exemples	15
2.3	Systèmes minimaux de moyenne dimension r donnée	17
3	Plongements dans des décalages	21
3.1	Généralités, premiers exemples	21
3.2	Autour du théorème de plongement de Jaworski	23
3.3	La conjecture de Lindenstrauss-Tsukamoto	25
3.4	Plongement de l'ensemble des points périodiques	26
3.5	n-marqueurs	32
3.5.1	n-marqueurs	32
3.5.2	Application aux plongements	36
3.6	Quelques lemmes techniques	39

1 Dimension topologique

Cette section est motivée par deux objets : l'introduction de la dimension périodique dans la troisième section, et l'étude de la moyenne dimension topologique. Celle-ci est définie comme une moyenne de la dimension topologique et on remarquera qu'elle se comporte relativement de la même façon. On utilise d'ailleurs les mêmes méthodes et outils dans les démonstrations des résultats de la section 2.

Dans ce chapitre, X est un espace topologique non vide.

1.1 Définition

Définition 1. Soit α un recouvrement de X . Soit $x \in X$. On pose :

$$ord_x(\alpha) = \sum_{U \in \alpha} (\mathbb{1}_U(x)) - 1$$

et :

$$ord(\alpha) = \sup_{x \in X} ord_x(\alpha)$$

On dit que $ord(\alpha)$ est l'ordre de α .

On a que $ord(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \infty$. Dans la suite, on considèrera des recouvrements ouverts finis, on aura donc $ord(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Soient $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ et $\beta = (B_j)_{j \in J}$ des recouvrements de X . On dit que β est un raffinement de α si pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ tel que $B_j \subset A_i$. On note $\beta \succ \alpha$.

Définition 2. Soit α un recouvrement ouvert fini de X . On pose :

$$D(\alpha) = \min_{\beta} \text{ord}(\beta)$$

où β parcourt tous les recouvrements ouverts finis de X tels que $\beta \succ \alpha$.

Remarque 1. 1. On a $D(\alpha) \in \mathbb{N}$

2. $D(\alpha) \leq n$ si et seulement si il existe β un recouvrement ouvert fini raffinant α tel que $\text{ord}(\beta) \leq n$.

3. Si α et $\tilde{\alpha}$ sont deux recouvrements ouverts finis tels que $\alpha \succ \tilde{\alpha}$, alors $D(\alpha) \geq D(\tilde{\alpha})$.

Définition 3. La dimension topologique de X est définie par :

$$\dim(X) = \sup_{\alpha} D(\alpha)$$

où α parcourt tous les recouvrements ouverts finis de X .

1.2 Premières propriétés

Proposition 1. Soit $F \subset X$ un sous-ensemble fermé de X . Alors $\dim(F) \leq \dim(X)$.

Démonstration. Soit α un recouvrement ouvert fini de F . Il existe une famille d'ouverts de X , $(U_i)_{i \in I}$, telle que : $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Comme $X \setminus F$ est un ouvert de X , $\beta = (U_i)_{i \in I} \cup (X \setminus F)$ est un recouvrement ouvert fini de X . Soit γ un recouvrement ouvert fini de X raffinant β tel que $\text{ord}(\gamma) = D(\beta)$. Soit $\tilde{\gamma} = (U \cap F)_{U \in \gamma}$. Alors $\tilde{\gamma}$ est un recouvrement ouvert fini de F raffinant α , et tel que $\text{ord}(\tilde{\gamma}) \leq \text{ord}(\gamma)$. Donc $\text{ord}(\alpha) \leq \text{ord}(\tilde{\gamma}) \leq \text{ord}(\gamma) = D(\beta)$. Finalement, $\dim(F) \leq \dim(X)$. \square

Lemme 1. Soit $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X . Alors on peut trouver un recouvrement $\beta = (V_i)_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, $V_i \subset U_i$ et $\text{ord}(\beta) \leq D(\alpha)$.

Démonstration. Soit $\gamma = (W_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que $\gamma \succ \alpha$ et $\text{ord}(\gamma) = D(\alpha)$. Alors on peut définir une application $\phi : J \rightarrow I$ telle que pour tout $j \in J$, $W_j \subset U_{\phi(j)}$. Alors posons :

$$\beta = (V_i)_{i \in I} = \left(\bigcup_{j \in \phi^{-1}(i)} W_j \right)_{i \in I}$$

β est un recouvrement ouvert fini de X et pour tout $i \in I$, on a $V_i \subset U_i$. De plus, soit $x \in X$. Alors $x \in V_i$ si et seulement s'il existe j dans $\phi^{-1}(i)$ tel que $x \in W_j$. On en déduit que $\text{ord}_x(\beta) \leq \text{ord}_x(\gamma)$. Donc finalement, ceci étant vrai pour tout $x \in X$, $\text{ord}(\beta) \leq D(\alpha)$. \square

Lemme 2. Soit F un sous-ensemble fermé de X . Soit $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X . Alors on peut trouver un recouvrement $\beta = (V_i)_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, $V_i \subset U_i$ et $\text{ord}_x(\beta) \leq \dim(F)$ pour tout $x \in F$.

Démonstration. Considérons le recouvrement ouvert fini de F : $(F \cap U_i)_{i \in I}$. Alors d'après le lemme précédent, on peut trouver un recouvrement $\gamma = (W_i)_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, $W_i \subset F \cap U_i$ et $\text{ord}(\gamma) \leq \dim(F)$. Pour tout W_i il existe O_i un ouvert de X tel que $W_i = F \cap O_i$. Posons :

$$\beta = (V_i)_{i \in I} = ((O_i \cup (X \setminus F)) \cap U_i)_{i \in I}$$

Alors β est un recouvrement ouvert fini de X tel que pour tout $i \in I$, $V_i \subset U_i$. De plus, si $x \in F$, $x \in V_i$ si et seulement si $x \in W_i$. Donc $\text{ord}_x(\beta) = \text{ord}_x(\gamma) \leq \text{ord}(\gamma) \leq \dim(F)$. \square

Proposition 2. Soient F et G deux sous-ensembles fermés de X . Alors :

$$\dim(F \cup G) = \max(\dim(F), \dim(G))$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on sait déjà que $\dim(F \cup G) \geq \max(\dim(F), \dim(G))$.

Soit α un recouvrement ouvert fini de $F \cup G$. En appliquant le lemme 2 à α et à F , on obtient un recouvrement $\beta = (U_i)_{i \in I}$ de $F \cup G$. Puis on obtient un recouvrement $\gamma = (V_i)_{i \in I}$ de $F \cup G$ en appliquant de nouveau le lemme 2 à β et à G . γ est tel que pour tout $i \in I$, $V_i \subset U_i$. Alors pour $x \in G$, on a $\text{ord}_x(\gamma) \leq \dim(G)$. D'autre part, si $x \in V_i \in \gamma$, alors $x \in U_i$. Donc $\text{ord}_x(\gamma) \leq \text{ord}_x(\beta) \leq \dim(F)$. Finalement, $\text{ord}_x(\gamma) \leq \max(\dim(F), \dim(G))$. Comme $\gamma \succ \alpha$, on en déduit que $D(\alpha) \leq \max(\dim(F), \dim(G))$. On a choisi α arbitrairement donc on peut conclure : $\dim(F \cup G) \leq \max(\dim(F), \dim(G))$. \square

Définition 4. Soit α une famille finie de sous-ensembles de X . On définit :

$$\text{maille}(\alpha) = \max_{U \in \alpha} \text{diam}(U)$$

Proposition 3. Supposons que X est un espace métrique compact. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\dim(X) \leq n$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement ouvert fini de X , α tel que $\text{maille}(\alpha) \leq \epsilon$ et $\text{ord}(\alpha) \leq n$.

Démonstration. Supposons $\dim(X) \leq n$. Soit $\epsilon > 0$. Alors par compacité de X , on peut trouver α un recouvrement fini formé de boules ouvertes de rayon $\frac{\epsilon}{2}$. Alors $D(\alpha) \leq n$, donc il existe $\beta \succ \alpha$ tel que $\text{ord}(\beta) \leq n$. On a bien $\text{maille}(\beta) \leq \epsilon$.

Réciproquement, soit α un recouvrement ouvert fini de X . Pour tout $U \in \alpha$ et tout $x \in U$, il existe une boule ouverte centrée en x , de rayon r_x , incluse dans U . Les boules ouvertes de la forme $B(x, \frac{r_x}{2})$ recouvrent X , et par compacité de X , on peut en extraire un recouvrement fini $(B(x, \frac{r_x}{2}))_{x \in A}$. Alors posons $\eta = \min_{x \in X} \frac{r_x}{2}$. Soit β tel que $\text{maille}(\beta) \leq \eta$ et $\text{ord}(\beta) \leq n$. Soit $V \in \beta$. Alors prenons y_V un élément de V . Il existe $x \in A$ tel que $y_V \in B(x, \frac{r_x}{2})$ et $B(x, r_x) \subset V$. Alors pour tout $y \in V$, $d(y, x) \leq \text{diam}(V) + d(y_V, x) < r_x$. Comme $B(x, r_x)$ est incluse dans un ouvert de α , on en déduit que V est inclus dans un ouvert de α . Finalement, $\beta \succ \alpha$. Donc $D(\alpha) \leq n$. Donc finalement, $\dim(X) \leq n$. \square

1.3 Dimension topologique des polyèdres

Les polyèdres vont être des outils particulièrement importants dans l'étude de la dimension topologique. En particulier, on montre ici que la dimension topologique étend à des espaces topologiques la notion de dimension algébrique d'un espace vectoriel.

1.3.1 Polyèdres

Définition 5. Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ une famille de points de \mathbb{R}^m . Alors on dit qu'elle est affinement indépendante si $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_r - v_1\}$ est une famille libre.

Définition 6. Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que Δ est un r -simplexe de \mathbb{R}^m si c'est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $r+1$ points de \mathbb{R}^m , $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$, affinement indépendants. Ces points sont appelés les sommets de Δ . Une face de Δ est un simplexe dont les sommets sont pris parmi les sommets de Δ .

Définition 7. Un complexe simplicial de \mathbb{R}^n est un ensemble fini C de simplexes de \mathbb{R}^n vérifiant :

1. si $\Delta \in C$, et si F est une face de Δ , alors $F \in C$.
2. si $\Delta \in C$ et $\Delta' \in C$, alors $\Delta \cap \Delta'$ est une face commune à Δ et Δ' .

Les sommets de C sont les sommets des simplexes composant C .

On appelle support de C , et on note $|C|$, le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par l'union de tous les simplexes composant C .

On appelle dimension combinatoire de C la dimension maximale des simplexes composant C .

Définition 8. Un espace topologique X est un polyèdre s'il existe un complexe simplicial C tel que X soit homéomorphe au support $|C|$ de C .

Définition 9. Un complexe simplicial abstrait est la donnée d'un couple (V, Σ) , où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les sommets et Σ un ensemble de parties de V , appelées simplexes, vérifiant qu'une sous-partie d'un simplexe est aussi un simplexe.

Soit (V, Σ) un complexe simplicial abstrait. On va lui associer un complexe simplicial C qu'on appellera sa réalisation géométrique. Posons $n = \text{card}(V)$ et $V = v_1, v_2, \dots, v_n$. On note (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors à tout simplexe σ on associe le simplexe de \mathbb{R}^n ayant pour ensemble de sommets : $\{e_i | v_i \in \sigma\}$. Alors l'ensemble de ces simplexes est bien un complexe simplicial de \mathbb{R}^n .

Réciproquement, soit C un complexe simplicial de \mathbb{R}^n . Alors si V est l'ensemble des sommets de C et Σ est composé des parties de V qui sont les ensembles des sommets d'un simplexe de C , le couple (V, Σ) est un complexe simplicial abstrait. On dit que c'est le complexe simplicial abstrait associé à C .

Exemple 1. Soit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$. C'est un complexe simplicial abstrait. Sa réalisation géométrique est un complexe simplicial de \mathbb{R}^4 , composé de 4 1-simplexes, 4 2-simplexes, et un 3-simplexe.

Voici un autre exemple important dans la suite :

Définition 10. Soit $\alpha = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement d'un ensemble X . Alors on appelle nerf de α le complexe simplicial abstrait (V, Σ) où $V = I$ et Σ est l'ensemble des $J \subset I$ tels que

$$\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$$

Dans la fin de cette section, on commence à relier la dimension combinatoire d'un polyèdre et sa dimension topologique. On verra dans la suite qu'elles sont en fait égales. C'est un résultat important pour la théorie de la dimension topologique, notamment grâce à la proposition 10.

Définition 11. Soit s un sommet d'un complexe simplicial C . La réunion de tous les simplexes de C ne contenant pas s est un ensemble fermé. On note $E_C(s)$ son complémentaire dans $|C|$. On dit que c'est l'étoile ouverte de s .

Proposition 4. Soit C un complexe simplicial de \mathbb{R}^n , et S l'ensemble de ses sommets. Alors $(E_C(s))_{s \in S}$ est un recouvrement ouvert fini de $|C|$ d'ordre m , où m est la dimension combinatoire de C .

Démonstration. Soit $x \in |C|$. Alors il existe Δ un simplexe de C tel que $x \in \Delta$. Soit s un sommet de Δ . Alors $x \in E_C(s)$. En effet, soit $\tilde{\Delta}$ un simplexe contenant x . Quitte à prendre une face de $\tilde{\Delta}$, on peut supposer que $x \in \tilde{\Delta}$. Alors $\Delta \cap \tilde{\Delta}$ est une face de Δ qui rencontre $\tilde{\Delta}$, donc c'est Δ . De même on montre $\Delta \cap \tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}$ donc $\Delta = \tilde{\Delta}$. Donc $s \in \tilde{\Delta}$. Finalement, $x \in E_C(s)$. On en déduit que $(E_C(s))_{s \in S}$ est un recouvrement ouvert fini de $|C|$.

Soit maintenant $x \in |C|$, et s_1, \dots, s_r les sommets tels que $x \in E_C(s_i)$. Soit Δ tel que $x \in \Delta$. Alors s_1, \dots, s_r sont des sommets de Δ . Donc r est strictement inférieur à la dimension combinatoire de Δ , donc à m . Ceci étant vrai pour tout x , $\text{ord}(\alpha) \leq m$.

Réciproquement, soit Δ un m -simplexe de C , de sommets s_0, \dots, s_m , et $x \in \Delta$. Alors $x \in E_C(s)$ pour tout $s \in \{s_0, \dots, s_m\}$. On en déduit $\text{ord}(\alpha) \geq m$. Finalement on a bien $\text{ord}(\alpha) = m$. \square

On admet ici un lemme (technique), démontré dans [Coo05].

Lemme 3. Soit C un complexe simplicial de \mathbb{R}^n . Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut construire un complexe simplicial C_N , qui a même dimension combinatoire et même support que $|C|$, et tel que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\Delta \in C_N} \text{diam}(\Delta) = 0$$

Proposition 5. Soit $|C|$ un complexe simplicial de \mathbb{R}^n , et m sa dimension combinatoire. Alors $\dim(|C|) \leq m$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha_N = (E_{C_N}(s))_{s \in S_N}$, où S_N est l'ensemble des sommets de C_N , défini dans le lemme précédent. Alors d'après la proposition 4, α_N est un recouvrement ouvert fini de $|C_N|$, donc de $|C|$, d'ordre m .

Alors $\text{maille}(\alpha_N) \leq 2(\max_{\Delta \in C_N} \text{diam}(\Delta))$. En effet, si $s \in S$ et $x, y \in E_C(s)$, il existe Δ_x et Δ_y contenant respectivement x et y et ayant s pour sommet. Alors on a :

$$d(x, y) \leq d(x, s) + d(s, y) \leq \text{diam}(\Delta_1) + \text{diam}(\Delta_2)$$

Donc $\text{diam}(E_{C_N}(s)) \leq 2(\max_{\Delta \in C_N} \text{diam}(\Delta))$, d'où le résultat.

On en déduit que $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{maille}(\alpha_N) = 0$. D'après la proposition 3, on a donc que $\dim(|C|) \leq m$. \square

1.3.2 Lemme de Lebesgue

Le lemme de Lebesgue va nous permettre en particulier d'achever le calcul de la dimension des polyèdres.

Proposition 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et α un recouvrement ouvert fini du cube $[0, 1]^n$, tel qu'aucun élément de α ne rencontre deux faces opposées de $[0, 1]^n$. Alors on a $D(\alpha) \geq n$.

Démonstration. Soit $\beta = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini raffinant α . Montrons que $\text{ord}(\beta) \geq n$. Supposons le contraire : $\text{ord}(\beta) < n$. On va construire une fonction $\psi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ continue qui n'admet pas de point fixe. On aura alors obtenu une contradiction avec le théorème du point fixe de Brouwer.

Pour tout $i \in I$, on considère le sommet $S(i) \in \{0, 1\}^n$, défini par :

$$S(i)|_k = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i \text{ rencontre le bord } \{x_k = 0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors si U_i rencontre une face, $S(i)$ se situe sur la face opposée. En effet, comme $\beta \succ \alpha$, aucun élément de β n'intersecte deux faces opposées du cube $[0, 1]^n$. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité adaptée au recouvrement β . On considère la fonction ϕ définie par :

$$\forall x \in [0, 1]^n, \phi(x) = \sum_{i \in I} \rho_i(x) S(i)$$

Alors si x est sur une face de $[0, 1]^n$, $\phi(x)$ appartient à la face opposée.

D'autre part, soit $x \in [0, 1]^n$. Alors $\phi(x)$ est dans l'enveloppe convexe de la famille $\{S(i) | x \in U_i\}$, qui est de cardinal $< n$ car $\text{ord}(\beta) < n$. Donc l'image de ϕ , notée $\text{Im}(\phi)$, est incluse dans une réunion finie de sous-espaces affines de $[0, 1]^n$ de dimension $< n$. Ces espaces sont fermés et d'intérieur vide dans $[0, 1]^n$, donc d'après le théorème de Baire, cette union est d'intérieur vide. Donc $\text{Im}(\phi)$ est d'intérieur vide dans $[0, 1]^n$.

Il existe donc un élément ω dans $[0, 1]^n \setminus \text{Im}(\phi)$. On considère $\pi : [0, 1]^n \setminus \{\omega\} \rightarrow \partial[0, 1]^n$ la projection qui à un point x associe l'intersection du bord de $[0, 1]^n$ avec la demi-droite partant de ω et passant par x . En particulier, π laisse fixe tout point du bord.

Considérons l'application $\psi = \pi \circ \phi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$. C'est bien une application continue, qui n'admet pas de point fixe. En effet, son image est incluse dans le bord de $[0, 1]^n$. Or tout point du bord est envoyé par ψ sur la face opposée du cube.

□

Corollaire 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\dim([0, 1]^n) = n$.

Démonstration. $[0, 1]^n$ est homéomorphe au support d'un n -simplexe de \mathbb{R}^n . D'après la proposition 5, on a donc $\dim([0, 1]^n) \leq n$. D'autre part, soit α un recouvrement ouvert fini de $[0, 1]^n$, tel qu'aucun ouvert dans α ne rencontre deux faces opposées du cube $[0, 1]^n$. Alors d'après la proposition 6, $D(\alpha) \geq n$. Donc $\dim([0, 1]^n) \geq n$. □

On obtient ainsi des exemples d'espaces de dimension n pour tout entier n . On a aussi $\dim([0, 1]^{\mathbb{N}}) = \infty$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[0, 1]^n$ est un sous-espace fermé de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, donc $n = \dim[0, 1]^n \leq \dim([0, 1]^{\mathbb{N}})$.

Corollaire 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et C un complexe simplicial de \mathbb{R}^n . Alors la dimension topologique du support $|C|$ de C est la dimension combinatoire de C .

Démonstration. On sait déjà d'après la proposition 5 que $\dim(|C|) \leq m$. Soit Δ un m -simplexe de C . Alors il est homéomorphe à $[0, 1]^m$, donc de dimension m . Donc d'après la proposition 1, $\dim(|C|) \geq m$. \square

Corollaire 3. Soient P et Q des polyèdres. Alors :

$$\dim(P \times Q) = \dim(P) + \dim(Q)$$

Démonstration. On va montrer que si C et C' sont deux complexes simpliciaux, $\dim(|C| \times |C'|) = \dim(|C|) + \dim(|C'|)$. Soient Δ un k -simplexe de C et Δ' un k' -simplexe de C' . Alors $\Delta \times \Delta'$ est homéomorphe à $[0, 1]^k \times [0, 1]^{k'}$, donc est de dimension $k+k'$. Or :

$$|C| \times |C'| = \bigcup_{\Delta \in C, \Delta' \in C'} \Delta \times \Delta'$$

Il s'agit d'une union finie d'ensembles fermés, donc d'après la proposition 2, $\dim(|C| \times |C'|) = \max_{\Delta \in C, \Delta' \in C'} \dim(\Delta \times \Delta')$. Comme la dimension d'un complexe simplicial est égale à sa dimension combinatoire, $\dim(|C| \times |C'|) = \dim(|C|) + \dim(|C'|)$. \square

1.3.3 Applications α -compatibles

Définition 12. Soit une application $f : X \rightarrow Y$. Soit α un recouvrement ouvert fini de X . On dit que f est α -compatible s'il existe un recouvrement ouvert fini β de Y , tel que le recouvrement $f^{-1}(\beta)$ raffine α .

Proposition 7. Supposons que X est compact. Soit α un recouvrement ouvert fini de X . Soit une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que pour tout $y \in Y$, il existe $U \in \alpha$ tel que $f^{-1}(y) \subset U$. Alors f est α -compatible.

Démonstration. Si $\alpha = (A_i)_{i \in I}$, posons : $\beta = (B_i)_{i \in I} = (\{y \in Y | f^{-1}(y) \subset A_i\})_{i \in I}$. Alors β est un recouvrement fini de Y tel que $f^{-1}(\beta) \succ \alpha$. Il reste à montrer que les B_i sont ouverts. Si un ensemble B_i n'est pas ouvert, alors il existe $y \in B_i$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $Y \setminus B_i$, convergeant vers y . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in f^{-1}(y_n) \cap (X \setminus A_i)$$

Comme X est compact, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant vers un élément $x \in X$. Par continuité de f , $f(x) = y$, donc $x \in A_i$. Mais d'autre part, comme $X \setminus A_i$ est fermé, $x \in X \setminus A_i$. C'est une contradiction, donc finalement les B_i sont des ouverts de Y . \square

Proposition 8. Soit une application $f : X \rightarrow Y$. Si β est un recouvrement ouvert fini de X , alors $D(f^{-1}(\beta)) \leq D(\beta)$.

Démonstration. Soit γ un recouvrement ouvert fini tel que $\gamma \succ \beta$ et $\text{ord}(\gamma) = D(\beta)$. Alors on a $\text{ord}(f^{-1}(\gamma)) \succ \text{ord}(\gamma)$. En effet, si $A \in \gamma$ et $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A$ donc :

$$\sum_{A \in \alpha} (\mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(x)) - 1 \leq \sum_{A \in \alpha} (\mathbb{1}_A(f(x)) - 1$$

Finalement, comme $f^{-1}(\gamma) \succ f^{-1}(\beta)$, on a $D(f^{-1}(\beta)) \leq D(\beta)$. \square

Proposition 9. Soit α un recouvrement ouvert fini de X et $f : X \rightarrow Y$ une application α -compatible. Alors $D(\alpha) \leq \dim(Y)$.

Démonstration. f est α -compatible donc il existe β un recouvrement ouvert fini de Y tel que $f^{-1}(\beta) \succ \alpha$. Alors d'après la proposition précédente, $D(\alpha) \leq D(f^{-1}(\beta)) \leq D(\beta) \leq \dim(Y)$. \square

Proposition 10. Supposons que X soit un espace métrique compact, et α un recouvrement ouvert fini de X . Alors il existe un espace Y de dimension topologique $D(\alpha)$ et une application $f : X \rightarrow Y$ continue et α -compatible.

On peut construire l'espace Y comme un polyèdre.

Démonstration. Soit $\beta = (B_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X qui raffine α et tel que $\text{ord}(\beta) = D(\alpha)$. Soit C la réalisation géométrique du nerf de β et Y le polyèdre $|C|$. On garde les mêmes notations que dans la définition 10. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à β . Alors on définit :

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \sum_{i \in I} \rho_i(x) e_i \end{aligned}$$

f est bien continue, et $\dim(Y)$ est la dimension combinatoire de C d'après le corollaire 2, donc c'est $\text{ord}(\beta)$, c'est-à-dire $D(\alpha)$.

Enfin, f est β -compatible d'après la proposition 7. En effet, soit $y \in Y$ et $\Delta \subset I$ le simplexe de C contenant y de dimension minimale (il est unique). Alors si $i \in \Delta$, et $f(x) = y$, $\rho_i(x) \neq 0$ donc $x \in B_i$. Donc $f^{-1}(y) \subset B_i$. Finalement, comme $\beta \succ \alpha$, f est α -compatible. \square

Corollaire 4. Soient X et Y deux compacts métrisables. Alors :

$$\dim(X \times Y) \leq \dim(X) + \dim(Y)$$

Démonstration. Soit γ un recouvrement ouvert fini de $X \times Y$. Alors par définition de la topologie produit sur $X \times Y$, chaque élément de γ peut s'écrire comme une réunion (finie car $X \times Y$ est compact) d'ouverts élémentaires $U \times V$. Donc on peut trouver deux recouvrements ouverts finis α et β respectivement de X et de Y , tels que $(\alpha \times \beta) = (U \times V)_{U \in \alpha, V \in \beta}$ raffine γ .

D'après la proposition 10, on peut trouver P un polyèdre de dimension $D(\alpha)$, Q un polyèdre de dimension $D(\beta)$, et deux applications continues, $f : X \rightarrow P$, α -compatible, et $g : Y \rightarrow Q$, β -compatible. Posons :

$$\begin{aligned} h : X \times Y &\longrightarrow P \times Q \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

Alors h est $(\alpha \times \beta)$ -compatible donc γ -compatible. Donc $D(\gamma) \leq \dim(P \times Q)$.

Définition 13. Soient $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ et $\beta = (B_j)_{j \in J}$ des recouvrements de X . On note $\alpha \vee \beta$ et on appelle joint de α et β le recouvrement : $(A_i \cap B_j)_{(i \in I, j \in J)}$.

Remarque 2. On a $\alpha \vee \beta \succ \alpha$ et $\alpha \vee \beta \succ \beta$

Proposition 11. Soient α et β des recouvrements de X . Alors :

$$D(\alpha \vee \beta) \leq D(\alpha) + D(\beta)$$

Démonstration. D'après la proposition 10, on peut trouver Y un polyèdre de dimension $D(\alpha)$, Y' un polyèdre de dimension $D(\beta)$, et deux applications continues, $f : X \rightarrow Y$, α -compatible, et $g : X \rightarrow Y'$, β -compatible. Posons :

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow Y \times Y' \\ x &\longmapsto ((f(x), g(x))) \end{aligned}$$

Alors h est $(\alpha \vee \beta)$ -compatible. Donc $D(\alpha \vee \beta) \leq \dim(Y \times Y')$. Comme Y et Y' sont compacts, on obtient :

$$D(\alpha \vee \beta) \leq \dim(Y) + \dim(Y') = D(\alpha) + D(\beta)$$

□

□

1.4 Plongements topologiques

Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit que X se plonge topologiquement dans Y s'il existe une application $f : X \rightarrow Y$ qui induit un homéomorphisme de X sur $f(X)$. f est appelée un plongement de X dans Y .

La dimension topologique étant un invariant topologique, d'après la proposition 1, si X se plonge topologiquement dans Y , on a $\dim(X) \leq \dim(Y)$.

Dans l'idée d'étudier les plongements d'un système dynamique dans un autre, on étudie ici les plongements d'un espace topologique X dans un espace topologique Y . Ceci pour deux raisons : si (X, T) se plonge dans (Y, S) , alors X se plonge topologiquement dans Y . De plus, dans la section 3., on cherche un équivalent pour les systèmes dynamiques pour le théorème 1 ci-dessous.

Proposition 12. Soit X un espace métrisable compact. Alors X se plonge topologiquement dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. On va exhiber une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de X dans $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \neq y, \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) \neq f_n(y)$$

Alors on pourra considérer l'application continue suivante :

$$\begin{aligned} \phi : X &\longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

qui est injective, donc induit une application bijective de X sur $\phi(X)$, et dont la réciproque ϕ^{-1} est continue car X est compact.

Soit $n \in \mathbb{N}$. X peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon $\frac{1}{n}$. Pour chaque couple (B_1, B_2) de telles boules, disjointes, la fonction :

$$X \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \frac{d(x, B_1)}{d(x, B_1) + d(x, B_2)}$$

est continue et vaut 0 sur la boule B_1 , et 1 sur la boule B_2 . On construit ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un nombre fini de fonctions.

Considérons l'ensemble de ces fonctions. C'est un ensemble dénombrable. Soient x et y distincts dans X . Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x et y appartiennent à deux boules disjointes de rayon $\frac{1}{n}$ du recouvrement exhibé ci-dessus. La fonction associée prend des valeurs distinctes (0 et 1) en x et en y .

□

Théorème 1. *Soit X un espace compact métrisable de dimension topologique finie n . Alors X se plonge topologiquement dans \mathbb{R}^{2n+1} .*

On montre ce théorème en utilisant le théorème de Baire. On démontre le résultat plus fort suivant :

Théorème 2. *Soit X un espace compact métrisable de dimension topologique finie n . Soit m un entier tel que $m \geq 2n + 1$. Alors l'ensemble des applications de $C(X, \mathbb{R}^m)$ qui induisent un homéomorphisme de X sur son image est un G_δ -dense dans $C(X, \mathbb{R}^m)$.*

Pour cela, on considèrera les espaces suivants : Pour $\epsilon > 0$, $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$ est l'espace des applications de $C(X, \mathbb{R}^m)$ qui sont ϵ -injectives, c'est-à-dire telles que :

$$\forall (x, y) \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$$

On va montrer qu'ils sont tous ouverts denses dans $C(X, \mathbb{R}^m)$, qu'on a muni de la distance uniforme d_∞ .

Lemme 4. *Soit $\epsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors l'espace $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$ est ouvert dans $C(X, \mathbb{R}^m)$.*

Démonstration. Soit $f \in C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$. Posons :

$$K = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \geq \epsilon\}$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in K, d(f(y), f(x)) > 0$$

Or K est fermé dans $X \times X$ donc compact. Donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in K, d(f(y), f(x)) \geq \delta$$

Soit maintenant $g \in C(X, \mathbb{R}^m)$ telle que $d_\infty(f, g) \leq \frac{\delta}{4}$. Alors pour tout $(x, y) \in K$,

$$\delta \leq d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), g(y)) + d(g(y), g(x)) + d(g(x), f(x)) \leq d(g(y), g(x)) + \frac{\delta}{2}$$

Donc $g \in C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$. Finalement $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$ est ouvert dans $C(X, \mathbb{R}^m)$

□

Pour montrer la densité des espaces $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$, nous aurons besoin d'un lemme intermédiaire.

On rappelle la définition suivante :

Définition 14. Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^m . Alors on dit qu'elle est affinement indépendante si $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_r - v_1\}$ est une famille libre.

Définition 15. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$. Soit $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ une famille de points de \mathbb{R}^m . On dit qu'elle est en position générale si toute sous-famille de $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ comprenant au plus $m+1$ points est affinement indépendante.

Lemme 5. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$. Soient $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ une famille de points de \mathbb{R}^m et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ une famille de points de \mathbb{R}^m en position générale telle que

$$\forall 0 \leq i \leq r, d(p_i, q_i) < \epsilon$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur r . Un singleton est toujours en position générale, on peut prendre $q_0 = p_0$. Supposons q_0, q_1, \dots, q_{r-1} déjà construits. Soit une sous-famille de $\{q_0, q_1, \dots, q_{r-1}\}$ comprenant au plus m points. Alors elle engendre un sous-espace affine de \mathbb{R}^m de dimension strictement inférieure à m . Cet espace est donc d'intérieur vide dans \mathbb{R}^m . Soit F l'union de tous les espaces de ce type. Alors F est une union finie de fermés d'intérieur vide, donc d'après le théorème de Baire, F est d'intérieur vide. On peut donc trouver un point q_r dans son complémentaire tel que $d(q_r, p_r) \leq \epsilon$. Alors par définition de F , $\{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ est en position générale. \square

Lemme 6. Soit X un espace compact métrisable de dimension topologique finie n . Soit m un entier tel que $m \geq 2n + 1$ et $\epsilon > 0$. Alors l'espace $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$ est dense dans $C(X, \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Soit $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ et $\delta > 0$. Comme X est compact, f est uniformément continue. Soit $\eta > 0$ tel que si $d(x, y) \leq \eta$, alors $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\delta}{2}$. D'après la proposition 3, on peut trouver un recouvrement ouvert fini α de X tel que $\text{ord}(\alpha) = n$ et $\text{maille}(\alpha) \leq \min(\eta, \epsilon)$. Notons $\alpha = \{U_0, \dots, U_r\}$ et choisissons pour tout U_i un point $a_i \in U_i$. Alors en posant $p_i = f(a_i)$ on obtient $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$ une famille de points de \mathbb{R}^m à laquelle on peut appliquer le lemme précédent. On obtient une famille de points $\{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ en position générale telle que

$$\forall 0 \leq i \leq r, d(p_i, q_i) < \frac{\delta}{2}$$

Soit $(\rho_i)_{i \in \{0, 1, \dots, r\}}$ une partition de l'unité subordonnée à α . Alors on peut définir l'application :

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto \sum_{i=0}^r \rho_i(x) q_i$$

g est une fonction continue. Montrons qu'elle est ϵ -injective. Soient x et y tels que $g(x) = g(y)$. Posons $I_x = \{0 \leq i \leq r \mid \rho_i(x) > 0\}$ et de même $I_y = \{0 \leq i \leq r \mid \rho_i(y) > 0\}$. On a :

$$\sum_{i \in I_x} \rho_i(x) q_i - \sum_{i \in I_y} \rho_i(y) q_i = 0$$

Comme les coefficients en jeu dans cette combinaison linéaire sont tous non nuls, la famille $(q_i)_{i \in I_x \cup I_y}$ est liée. Comme $\{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ est en position générale, on en déduit que $\text{card}(I_x \cup I_y) >$

$m + 1$. Or $\text{card}(I_x) + \text{card}(I_y) \leq 2\text{ord}(\alpha) + 2 \leq 2n + 2 \leq m + 1$. On en déduit que I_x et I_y ont un élément i en commun. Alors x et y sont dans U_i . Comme $\text{maille}(\alpha) < \epsilon$, $d(x, y) < \epsilon$. Finalement, g est ϵ -injective.

Montrons que $\|f - g\|_\infty \leq \delta$. Soit $x \in X$. Si $\rho_i(x) > 0$, alors comme $\text{diam}(U_i) \leq \eta$, $d(f(x), p_i) \leq \frac{\delta}{2}$. Donc $d(f(x), \sum_{i=0}^r \rho_i p_i) \leq \frac{\delta}{2}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq \frac{\delta}{2} + d\left(\sum_{i=0}^r \rho_i(x) q_i, \sum_{i=0}^r \rho_i(x) p_i\right) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + d\left(\sum_{i=0}^r \rho_i(x) (q_i - p_i), 0\right) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \times \sum_{i=0}^r \rho_i(x) \leq \delta \end{aligned}$$

Donc $\|f - g\|_\infty \leq \delta$.

Finalement, on a montré que $C_\epsilon(X, \mathbb{R}^m)$ est dense dans $C(X, \mathbb{R}^m)$. \square

Démontrons maintenant le théorème.

Démonstration. L'ensemble des applications de $C(X, \mathbb{R}^m)$ qui induisent un homéomorphisme de X sur son image s'écrit de la façon suivante :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_{\frac{1}{k}}(X, \mathbb{R}^m)$$

D'après les lemmes précédents, c'est donc une intersection dénombrable d'ouverts denses de l'espace métrique complet $C(X, \mathbb{R}^m)$. On peut donc appliquer le théorème de Baire pour conclure. \square

2 Moyenne dimension topologique

La moyenne dimension topologique est un invariant topologique, introduit par Gromov, et qui permet de distinguer entre des systèmes de dimension infinie.

Dans toute cette section, X est un espace métrique compact et T un homéomorphisme sur X .

2.1 Généralités

Notation 1. Soit α un recouvrement ouvert de X . Soient a et b dans \mathbb{Z} tels que $a < b$. On note :

$$\alpha_a^b = T^{-a}(\alpha) \vee T^{-a-1}(\alpha) \vee \dots \vee T^{-b}(\alpha)$$

α_a^b est un recouvrement ouvert de X .

Proposition 13. *Pour tout recouvrement ouvert fini α de X , la suite $(D(\alpha_0^{n-1}))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive.*

Démonstration. Soient m et n dans \mathbb{N} . Alors :

$$\alpha_0^{n+m-1} = \alpha_0^{n-1} \vee \alpha_n^{m-1} = \alpha_0^{n-1} \vee T^{-n}(\alpha_0^{m-1})$$

Donc d'après la proposition précédente et la proposition 8 :

$$D(\alpha_0^{n+m-1}) \leq D(\alpha_0^{n-1}) + D(T^{-n}(\alpha_0^{m-1})) \leq D(\alpha_0^{n-1}) + D(\alpha_0^{m-1})$$

□

On en déduit que pour tout recouvrement ouvert fini α de X , la suite $(\frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n}$$

Définition 16. *On définit la dimension moyenne du système dynamique (X, T) :*

$$mdim(X, T) = \sup_{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n}$$

où α parcourt tous les recouvrements ouverts finis de X .

On démontre ici quelques propriétés de la moyenne dimension. On remarquera des similitudes avec la dimension topologique, dans les énoncés et la manière de les démontrer.

Proposition 14. *Si (X, T) et (Y, S) sont conjugués, alors $mdim(X, T) = mdim(Y, S)$.*

Démonstration. Soit $h : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme tel que $h \circ T = S \circ h$. Soit α un recouvrement ouvert fini de Y et $\tilde{\alpha} = h^{-1}(\alpha)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\tilde{\alpha}_0^{n-1} = h^{-1}(\alpha_0^{n-1})$, donc d'après la proposition 8, $D(\alpha_0^{n-1}) \geq D(\tilde{\alpha}_0^{n-1})$. On obtient : $mdim(X, T) \leq \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n}$, donc finalement $mdim(X, T) \leq mdim(Y, S)$. En reprenant la même démonstration avec h^{-1} , on obtient $mdim(X, T) \geq mdim(Y, S)$. Finalement $mdim(X, T) = mdim(Y, S)$. □

Proposition 15. *Si F est un sous-ensemble fermé de X invariant par T , alors $mdim(F, T|_F) \leq mdim(X, T)$.*

Démonstration. Soit α un recouvrement ouvert fini de F . Il existe une famille d'ouverts de X , $(U_i)_{i \in I}$, telle que : $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Comme $X \setminus F$ est un ouvert de X , $\beta = (U_i)_{i \in I} \cup (X \setminus F)$ est un recouvrement ouvert fini de X . Soit $n \in \mathbb{N}$ et γ un recouvrement ouvert fini de X raffinant β_0^{n-1} tel que $ord(\gamma) = D(\beta_0^{n-1})$. Soit $\tilde{\gamma} = (U \cap F)_{U \in \gamma}$. Alors $\tilde{\gamma}$ est un recouvrement ouvert fini de F raffinant α_0^{n-1} , et tel que $ord(\tilde{\gamma}) \leq ord(\gamma)$. Donc :

$$ord(\alpha_0^{n-1}) \leq ord(\tilde{\gamma}) \leq ord(\gamma) = D(\beta)$$

Finalement, $mdim(F, T|_F) \leq mdim(X, T)$. □

Proposition 16. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $mdim(X, T^m) = m \times mdim(X, T)$.

Démonstration. Soit α un recouvrement ouvert fini de X . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\alpha \vee T^{-m} \dots \vee T^{-m(n-1)})}{n} \leq m \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\alpha_0^{mn-1})}{nm}$$

On en déduit $mdim(X, T^m) \leq m \times mdim(X, T)$ D'autre part,

$$\alpha_0^{mn-1} = \alpha_0^{k-1} \vee T^{-k} \alpha_0^{k-1} \dots \vee T^{-(n-1)m} \alpha_0^{n-1}$$

D'où : $\frac{D(\alpha_0^{mn-1})}{mn} \leq \frac{mdim(X, T^m)}{m}$. Donc $mdim(X, T) \leq \frac{mdim(X, T^m)}{m}$. Finalement $mdim(X, T^m) = m \times mdim(X, T)$. \square

Proposition 17. Soit $I \subset \mathbb{N}$, et $(X_i, T_i)_{i \in I}$ une famille de systèmes dynamiques (finie ou non). Alors :

$$mdim(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} T_i) \leq \sum_{i \in I} mdim(X_i, T_i)$$

Démonstration. Soit α un recouvrement ouvert fini de $X = \prod_{i \in I} X_i$. Tout ouvert U dans α peut être décrit comme l'union d'ouverts de la forme $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n_i}$, où chaque U_i est un ouvert de X_i . On peut donc trouver un entier N et un recouvrement ouvert fini de X , β , raffinant α , de la forme :

$$\beta = \pi_1^{-1}(\beta_1) \vee \dots \vee \pi_N^{-1}(\beta_N)$$

où les β_i sont des recouvrements ouverts finis des X_i , et $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la projection sur la i -ième coordonnée. Alors, d'après la proposition 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D(\alpha_0^{n-1}) \leq D(\beta_0^{n-1}) \leq \sum_{i=1}^N D((\beta_i)_0^{n-1})$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n} \leq \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D((\beta_i)_0^{n-1})}{n} \leq \sum_{i=1}^N mdim(X_i, T_i)$$

\square

2.2 Exemples

D'après la proposition qui suit, la notion de moyenne dimension topologique ne devient pertinente qu'en dimension topologique infinie.

Proposition 18. Supposons X de dimension topologique finie. Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue. Alors $mdim(X, T) = 0$.

Démonstration. Soit N la dimension topologique de X . Soit α un recouvrement ouvert fini de X . Alors $D(\alpha_0^{n-1}) \leq N$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n} = 0$, donc que $mdim(X, T) = 0$. \square

Exemple 2. Si $(X_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de systèmes dynamiques, tous de dimension topologique finie, alors $\text{mdim}(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} T_i) = 0$

Dans la fin de cette section, on calcule la moyenne dimension de certains décalages. On va obtenir des premiers exemples, simples, de systèmes dynamiques de moyenne dimension n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais contrairement à la dimension topologique, la moyenne dimension peut prendre toutes les valeurs réelles positives, ce qu'on verra dans la section suivante.

Dans tout la suite, pour tout compact K , on notera σ le décalage bilatéral sur l'ensemble des suites $K^{\mathbb{Z}}$.

De plus, pour $I \subset \mathbb{N}$, π_I désignera la projection qui à un élément de $K^{\mathbb{Z}}$ associe la liste dans $K^{\text{card}(I)}$ de ses coordonnées indicées par I .

Proposition 19. *Soit K un compact de dimension topologique finie d . Alors $\text{mdim}(K^{\mathbb{Z}}, \sigma) \leq d$.*

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha}$ un recouvrement ouvert fini de $K^{\mathbb{Z}}$.

Par définition de la topologie produit, $\tilde{\alpha}$ admet un sous-recouvrement par des ouverts de la forme $\pi_{-k, \dots, k}^{-1}(V)$, où les V sont des ouverts de K^{2k+1} .

Par compacité de $K^{\mathbb{Z}}$, on peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ et un sous-recouvrement fini α de $\tilde{\alpha}$ par des ouverts de la forme $\pi_{-N, \dots, N}^{-1}(V)$, où les V sont des ouverts de K^{2N+1} .

Pour $n \in \mathbb{N}$, α_0^{n-1} est de la forme $\pi_{-N, \dots, N+n-1}^{-1}(\beta)$ où β est un recouvrement ouvert fini de $\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}(K^{\mathbb{Z}}) \subset K^{2N+1+n}$. Donc d'après la proposition 8, $D(\alpha_0^{n-1}) \leq D(\beta)$. Donc :

$$D(\tilde{\alpha}_0^{n-1}) \leq D(\alpha_0^{n-1}) \leq D(\beta) \leq d \times (2N + 1 + n)$$

On en déduit :

$$\frac{D(\tilde{\alpha}_0^{n-1})}{n} \leq \frac{d \times (2N + 1 + n)}{n}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\tilde{\alpha}_0^{n-1})}{n} \leq d$$

□

Proposition 20. *Soit X un sous-décalage de $([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}$ et θ un réel tels qu'il existe un ensemble d'indices $I \subset \mathbb{N}$ tel que :*

1.

$$\theta = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|I \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n}$$

2. *il existe $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $x \in ([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}$ tel que*

$$\pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(x) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(\bar{x})$$

alors $x \in X$

Alors $\text{mdim}(X, \sigma) \geq \theta d$.

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha}$ un recouvrement ouvert fini de $[0, 1]^d$, tel qu'aucun de ses éléments n'intersecte deux faces opposées de $[0, 1]^d$. Alors $\pi_1^{-1}(\tilde{\alpha})$ induit un recouvrement ouvert fini α de X . Soient $n \in \mathbb{N}$, et β un sous-recouvrement arbitraire de α_0^{n-1} . Posons $I_n = I \cap \{0, \dots, n-1\}$ et :

$$\tilde{\beta} = \{\pi_{I_n}(\{x \in U \mid \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(x) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(\tilde{x})\})\}_{U \in \beta}$$

Alors $\tilde{\beta}$ est un recouvrement ouvert fini de $([0, 1]^d)^{|I_n|}$. En effet, soit $U \in \beta$. Si U est de la forme $\prod_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de $[0, 1]^d$. Alors $\pi_{I_n}(\{x \in U \mid \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(x) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(\tilde{x})\})$ est ouvert en tant que produit d'ouverts de $([0, 1]^d)^{|I_n|}$. Comme tout ouvert de β s'écrit comme union d'ouverts de cette forme, on en déduit que tous les éléments de $\tilde{\beta}$ sont ouverts.

De plus, comme aucun élément de α n'intersecte deux faces opposées de $[0, 1]^d$, si $V \in \alpha_0^{n-1}$, $\pi_{\{0, \dots, n-1\}}(V)$ n'intersecte pas deux faces opposées de $([0, 1]^d)^n$. Donc a fortiori, aucun élément de $\tilde{\beta}$ n'intersecte deux faces opposées de $[0, 1]^{d|I_n|}$. Donc d'après la proposition 6 : $\text{ord}(\tilde{\beta}) \geq d|I_n|$.

D'autre part, $\text{ord}(\beta) \geq \text{ord}(\tilde{\beta})$. En effet, soit $x' \in ([0, 1]^d)^{|I_n|}$. Alors si $x' \in V \in \tilde{\beta}$, il existe $x \in U \in \beta$ tel que $x' = \pi_{I_n}(x)$. Donc $\text{ord}_{x'}(\tilde{\beta}) \leq \text{ord}_x(\beta) \leq \text{ord}(\beta) + 1$. Finalement, $\text{ord}(\beta) \geq \text{ord}(\tilde{\beta})$.

On en déduit que $\text{ord}(\beta) \geq d|I_n|$, et donc que $D(\alpha_0^{n-1}) \geq d|I_n|$. Finalement :

$$\text{mdim}(X) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\alpha_0^{n-1})}{n} \geq d \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|I \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n} = \theta d$$

□

Corollaire 5. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\text{mdim}([0, 1]^d, \sigma) = d$.

On remarque que pour démontrer ce résultat, on a procédé de manière analogue à la démonstration de $\dim([0, 1]^d) = d$. On a notamment la même utilisation du lemme de Lebesgue.

Corollaire 6. $\text{mdim}([0, 1]^{\mathbb{N}}, \sigma) = \infty$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $A = \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \forall k \geq n, u_k = 0\}$. Alors $A^{\mathbb{N}}$ est un sous-ensemble fermé de $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$, σ -invariant, et homéomorphe à $([0, 1]^n)^{\mathbb{Z}}$. Donc d'après la proposition 15, $n = \text{mdim}(A^{\mathbb{Z}}, \sigma) \leq \text{mdim}([0, 1]^{\mathbb{N}}, \sigma)$. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\text{mdim}([0, 1]^{\mathbb{N}}, \sigma) = \infty$. □

2.3 Systèmes minimaux de moyenne dimension r donnée

Notre but est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 21. Soit un réel $r \geq 0$. Il existe $X \subset [0, 1]^{\mathbb{Z}}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{mdim}(X, \sigma^m) = r$ et tel que (X, σ^m) est minimal.

Dans la suite, pour $I \subset \mathbb{N}$, π_I désignera la projection qui à un élément de $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ associe la liste dans $[0, 1]^{\text{card}(I)}$ de ses coordonnées indicées par I .

Soit un réel $r > 0$. Soient t un réel et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{r}{m} = t$ et $0 < t < 1$. Alors s'il existe un sous-décalage $X \subset [0, 1]^{\mathbb{Z}}$ tel que $\text{mdim}(X, \sigma) = t$, on a $\text{mdim}(X, \sigma^m) = m \times \text{mdim}(X, \sigma) = r$. On peut donc supposer dans la suite $r < 1$.

On va définir une suite de sous-décalages X_n de type bloc associés à (q_n, B_n) , où B_n est un sous-ensemble fermé de $[0, 1]^{q_n}$. X_n est l'ensemble des suites de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ qui peuvent s'écrire comme concaténation d'éléments appartenant à B_n . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_n = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid (x_i, \dots, x_{i+q_n-1}) \in B_n \text{ si } i \equiv 0 \text{ mod } q_n\}$$

Le sous-décalage recherché sera :

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

On va construire la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à utiliser la proposition 20 pour minorer $\text{mdim}(X, T)$ par r , et le lemme suivant pour majorer $\text{mdim}(X, T)$ par r : Ce lemme est une version simplifiée de la proposition 4.1 dans [CK05].

Lemme 7. *Soit un sous-décalage $X \subset [0, 1]^{\mathbb{Z}}$. Alors*

$$\text{mdim}(X, \sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\dim(\pi_n(X))}{n}$$

où $\pi_n : [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, 1]^n$ est la projection qui à un élément de $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ associe ses n premières coordonnées.

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha}$ un recouvrement ouvert fini arbitraire de X .

Par définition de la topologie produit, tout ouvert de $\tilde{\alpha}$ est une union d'ouverts de la forme $\pi_{-k, \dots, k}^{-1}(V)$, où les V sont des ouverts de $[0, 1]^{2k+1}$.

Par compacité de X , on peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ et un recouvrement ouvert fini α tel que $\alpha \succ \tilde{\alpha}$ composé d'ouverts de la forme $\pi_{\{-N, \dots, N\}}^{-1}(V)$, où les V sont des ouverts de $[0, 1]^{2N+1}$.

α_0^{n-1} est de la forme $\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}^{-1}(\beta)$ où β est un recouvrement ouvert fini de $\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}(X)$. Donc d'après la proposition 8, $D(\alpha_0^{n-1}) \leq D(\beta)$.

Donc :

$$D(\tilde{\alpha}_0^{n-1}) \leq D(\alpha_0^{n-1}) \leq D(\beta) \leq \dim(\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}(X))$$

De plus, $\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}(X) \subset \pi_{\{-N, \dots, N-1\}}(X) \times \pi_n(X)$. Donc d'après le corollaire 4 :

$$\dim(\pi_{\{-N, \dots, N+n-1\}}(X)) \leq \dim(\pi_{\{-N, \dots, N-1\}}(X)) + \dim(\pi_n(X))$$

Donc $D(\tilde{\alpha}_0^{n-1}) \leq \dim(\pi_{\{-N, \dots, N-1\}}(X)) + \dim(\pi_n(X))$ et en divisant par n de chaque côté, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\tilde{\alpha}_0^{n-1})}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\dim(\pi_n(X))}{n}$$

D'où :

$$mdim(X, \sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{dim(\pi_n(X))}{n}$$

□

Démontrons maintenant la proposition 21.

Démonstration. Pour construire la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on procède par récurrence.

Posons $q_0 = 0$, $B_0 = [0, 1]$ et $I_0 = \mathbb{N}$.

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait déjà construit q_n et B_n . (X_n, σ) est un sous-décalage de type bloc, il existe donc pour ce système un élément y dont l'orbite est dense dans X_n . Quitte à composer plusieurs fois y par σ , on peut supposer : $\pi_{\{0, \dots, q_n-1\}}(y) \in B_n$. D'autre part, il existe un entier r_{n+1} assez grand pour que :

$$\pi_{\{-r_{n+1}, \dots, r_{n+1}\}}(x) = \pi_{\{-r_{n+1}, \dots, r_{n+1}\}}(x') \Rightarrow d(x, x') \leq 2^{-n}$$

On peut alors trouver un entier $L_{n+1} \geq r_{n+1}$, multiple de q_n , tel que pour tout $x \in X_n$, il existe $k \in \{-L_{n+1} + r_{n+1}, \dots, L_{n+1} - r_{n+1}\}$ tel que :

$$d(x, \sigma^k(y)) \leq 2^{-n}$$

Posons $q_{n+1} = 2L_{n+1}(a_{n+1} + 1)$, où a_n est un entier qui reste à déterminer. On définit enfin B_{n+1} comme l'ensemble des concaténations de $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ blocs appartenant à B_n , se terminant par le $2L_{n+1}$ -uplet : $(y_{-L_{n+1}}, \dots, y_{L_{n+1}-1})$.

L'orbite de tout point de X_{n+1} est $2^{-(n+1)}$ -dense. En effet, soit $x' \in X_{n+1}$ et $x \in X_{n+1}$. Alors il existe $k \in \{-L_{n+1} + r_{n+1}, \dots, L_{n+1} - r_{n+1}\}$ tel que :

$$d(x', \sigma^k(y)) \leq 2^{-n}$$

D'autre part, comme $k \in \{-L_{n+1} + r_{n+1}, \dots, L_{n+1} - r_{n+1}\}$ et $x \in X_{n+1}$, on a $\pi_{\{-r_{n+1}, \dots, r_{n+1}\}}(\sigma^k(x)) = \pi_{\{-r_{n+1}, \dots, r_{n+1}\}}(\sigma^k(y))$, donc $d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \leq 2^{-n}$. Donc $d(x', \sigma^k(x)) \leq 2^{-(n+1)}$. On en déduit que l'orbite de tout point de X est dense dans X , c'est-à-dire que X est minimal.

De plus, on va construire pour tout $n \in \mathbb{N}$ un sous-ensemble $I_n \subset \mathbb{Z}$ et un élément $x_n \in X_n$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
2. $\pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_n) \Rightarrow x \in X_n$
3. $\forall m \geq n, \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_m) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_n)$

On aura alors qu'en définissant $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$:

$$mdim(X, \sigma) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|I \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n}$$

En effet, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers $\bar{x} \in X$. Alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_n) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(\bar{x})$, on a :

$$\pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(\bar{x}) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I}(x) \Rightarrow x \in X$$

On peut donc appliquer le lemme 7.

Construisons ces éléments pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons R_n l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $k \in \{0, \dots, q_n - 2L_n\}$ tel que $i \equiv k \pmod{q_n}$. On pose alors $I_n = \bigcap_{i=0}^n R_i$ et x_n est un élément arbitraire de Φ_n .

Vérifions qu'on obtient les propriétés voulues.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit x tel que $\pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_n)$. Alors pour tout $l \leq n$, si i est tel qu'il existe $k \in \{q_l - 2L_l + 1, \dots, q_l\}$ tel que $i \equiv k \pmod{q_l}$, alors la i -ème coordonnée de x est égale à celle de x_n : c'est $y_{k-q_l+L_l-1}$. Par définition des B_l , on en déduit : $x \in \Phi_n$. Donc $x \in X_n$.

Enfin, soit $m \geq n$. x_m appartient à Φ_m , donc à Φ_n . Donc par un raisonnement analogue, $\pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_m) = \pi_{\mathbb{Z} \setminus I_n}(x_n)$.

Calculons la densité supérieure de I .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $m > n$, on a $q_n \leq q_m - 2L_m$ car $q_n | L_m | q_m - 2L_m$. Donc $\{0, \dots, q_n - 1\} \subset R_m$. Donc :

$$I \cap \{0, \dots, q_n - 1\} = \bigcap_{k=1}^n R_k$$

Donc :

$$\frac{\text{card}(I \cap \{0, \dots, q_n - 1\})}{q_n} = \prod_{k=1}^n \frac{q_k - 2L_k}{q_k}$$

Et comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $q_k = 2L_k(a_k + 1)$ par définition, on a :

$$\frac{\text{card}(I \cap \{0, \dots, q_n - 1\})}{q_n} = \prod_{k=1}^n \frac{2a_k L_k}{2a_k L_k + 2L_k} = \left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{1}{a_k} \right)^{-1}$$

Comme $0 < r < 1$, on peut choisir les a_n de manière à ce que $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{a_n}) = -\log(r)$. On a alors :

$$\frac{\text{card}(I \cap \{0, \dots, q_n - 1\})}{q_n} = \left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{1}{a_k} \right)^{-1} = r$$

Donc :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|I \cap \{0, \dots, n - 1\}|}{n} \geq r$$

Finalement, $\text{mdim}(X, T) \geq r$.

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $mdim(X, \sigma) \leq mdim(X_n, \sigma)$, et d'après le lemme 7,

$$mdim(X_n, \sigma) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{dim(\pi_N(X_n))}{N}.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par définition de X_n ,

$$\pi_{q_n k}(X_n) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq q_n} ([0, 1]^i \times B_n^{k-1} \times [0, 1]^{q_n-i})$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$dim([0, 1]^i \times B_n^{k-1} \times [0, 1]^{q_n-i}) \leq q_n + dim(B_n^{k-1}) = q_n + (k-1) \times dim(B_n)$$

Or on a la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, dim(B_{n+1}) = dim(B_n) \times \frac{q_{n+1} - 2L_{n+1}}{q_n} = dim(B_n) \times \frac{a_{n+1} \times 2L_{n+1}}{q_n}$$

Ce qui permet de calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{dim(B_n)}{q_n} = \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1}$$

Donc

$$\frac{dim(\pi_{q_n k}(X_n))}{q_n k} \leq \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} \times \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1}$$

Donc :

$$mdim(X_n, \sigma) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi_{q_n k}(X_n)}{q_n k} \leq \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1}.$$

Donc $mdim(X, \sigma) \leq r$.

□

3 Plongements dans des décalages

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, X et Y seront des espaces compacts métrisables, T et S des homéomorphismes, respectivement sur X et Y . On se donne d un entier, et on cherche à savoir quand un système dynamique (X, T) peut se plonger dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

3.1 Généralités, premiers exemples

On rappelle qu'on dit qu'une application $\phi : X \rightarrow Y$ est un plongement si elle induit un homéomorphisme de X sur $\phi(X)$.

Définition 17. Soient X et Y des espaces topologiques, T un homéomorphisme de X , S un homéomorphisme de Y . On dit que le système dynamique (X, T) se plonge dans le système dynamique (Y, S) s'il existe un plongement $\phi : X \rightarrow Y$ tel que $\phi \circ T = S \circ \phi$.

Proposition 22. *Pour que le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, il faut que $\text{mdim}(X, T) \leq d$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 15. □

Remarque 3. Le système dynamique (X, T) peut toujours se plonger dans le décalage $(([0, 1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. En effet, d'après la proposition 12, il existe un plongement ϕ de X dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Alors on peut construire le plongement suivant :

$$\Phi : x \longmapsto (\dots, \phi(T^{-1}(x)), \phi(x), \phi(T(x)), \dots)$$

de (X, T) dans $(([0, 1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

D'autre part, si on suppose de plus que X est de dimension finie n , alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^{2n+1})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. En effet, d'après le théorème 1, il existe un plongement ϕ de X dans $[0, 1]^{2n+1}$, et on peut conclure comme précédemment.

La fin de cette section est consacrée à la description d'une méthode utilisée systématiquement dans la suite, pour prouver l'existence de plongements dans des décalages. Comme dans le théorème 1, on utilisera le théorème de Baire. La proposition suivante permet de se ramener à l'espace (métrique complet) $C(X, [0, 1]^d)$.

Proposition 23. *Le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ si et seulement s'il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]^d$ telle que :*

$$\forall x \neq y, \exists i \in \mathbb{Z}, f(T^i(x)) \neq f(T^i(y))$$

Démonstration. Supposons que ϕ est un plongement de X dans $([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}$, tel que $\phi \circ T = \sigma \circ \phi$. Soient x et y distincts dans X . Alors il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que les i èmes coordonnées respectives de $\phi(x)$ et $\phi(y)$ soient distinctes. Comme $\phi \circ T^i = \sigma^i \circ \phi$, en posant $\pi : ([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, 1]^d$ la projection sur la 0ième coordonnée, on a $\pi \circ \phi \circ T^i(x) \neq \pi \circ \phi \circ T^i(y)$. En posant $f = \pi \circ \phi$, on a la propriété voulue.

Réciproquement, soit $f \in C(X, [0, 1]^d)$ ayant la propriété énoncée. Pour tout x dans X , posons $I_f(x) = (f(T^i(x)))_{i \in \mathbb{Z}}$. L'application $I_f : X \rightarrow ([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}$ est continue, injective, et $I_f \circ T = \sigma \circ I_f$. Comme X est compact, I_f est donc bien un plongement du système dynamique (X, T) dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. □

On notera désormais, pour $f \in C(X, [0, 1]^d)$:

$$I_f : x \longmapsto (f(T^i(x)))_{i \in \mathbb{Z}}$$

On pose :

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} ; \Omega = (X \times X) \setminus \Delta$$

et on note, pour tout ensemble $K \subset \Omega$, D_K l'ensemble des fonctions continues de X dans $[0, 1]^d$ telles que :

$$\forall (x, y) \in K, \exists i \in \mathbb{Z}, f(T^i(x)) \neq f(T^i(y))$$

On cherche donc à montrer que D_Ω est non vide. On va chercher, pour tous x et y distincts dans X , un voisinage compact K de (x, y) tel que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$.

Alors grâce au lemme suivant, tous les D_K considérés seront ouverts et denses dans $C(X, [0, 1]^d)$.

Lemme 8. Soit un ensemble compact $K \subset \Omega$. Alors D_K est ouvert dans $C(X, [0, 1]^d)$.

Démonstration. Soit $f \in D_K$. Posons :

$$H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sup_{i \in \mathbb{Z}} |f(T^i(x)) - f(T^i(y))|$$

Alors :

f est continue donc H est semi-continue inférieurement,

$\forall (x, y) \in K, H(x, y) > 0$,

K est compact

On en déduit que H est minorée sur K et atteint sa borne inférieure.

Soit $\epsilon > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in K, H(x, y) > \epsilon$. Soit $g \in C(X, [0, 1]^d)$ telle que $\|f - g\| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Montrons que $g \in D_K$.

Soient $(x, y) \in K$ et $i \in \mathbb{Z}$.

$$|f(T^i(x)) - f(T^i(y))| \leq |f(T^i(x)) - g(T^i(x))| + |g(T^i(x)) - g(T^i(y))| + |g(T^i(y)) - f(T^i(y))|$$

$$\leq |g(T^i(x)) - g(T^i(y))| + \frac{\epsilon}{2}$$

Donc :

$$\frac{\epsilon}{2} \leq H(x, y) - \frac{\epsilon}{2} \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |g(T^i(x)) - g(T^i(y))|$$

On en déduit que $g \in D_K$. Finalement, D_K est ouvert dans $C(X, [0, 1]^d)$.

□

Le principal travail dans la preuve sera de trouver des voisinage compacts K tels que D_K est dense. Alors on obtiendra une famille de compacts K recouvrant $\Omega \subset X \times X$. $X \times X$ est compact donc Ω est un espace de Lindelöf. On pourra donc recouvrir Ω par un ensemble dénombrable de compacts K_n tels que D_{K_n} est un ouvert dense de $C(X, [0, 1]^d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $D_\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{K_n}$, d'après le théorème de Baire, D_Ω sera dense dans $C(X, [0, 1]^d)$ donc en particulier non vide. Ce qui permettra de conclure à l'existence d'un plongement.

3.2 Autour du théorème de plongement de Jaworski

Nous avons déjà vu, dans la section précédente, que si X est de dimension finie n , alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^{2n+1})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. On peut se demander si l'entier $2n+1$ est minimal. Dans le cas d'un système apériodique, Jaworski a montré dans [Jaw74] que (X, T) se plongeait dans $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. On remarque la similitude, dans l'énoncé et la démonstration, avec le théorème 1, qui est d'ailleurs utilisé dans la preuve. Il s'agit ici d'une première tentative pour trouver un équivalent de ce résultat aux plongements de systèmes dynamiques.

Notation 2. Si (X, T) est un système dynamique, et $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'ensemble des points périodiques de (X, T) de période inférieure ou égale à k , et H_k l'ensemble des points périodiques de (X, T) de période k . Enfin, on note P l'ensemble des points périodiques.

Lemme 9. *Supposons que (X, T) est de dimension finie n , et que $P_{6n} = \emptyset$. Soient x et y distincts dans X . Alors on peut trouver des indices i_0, i_1, \dots, i_{2n} tels que les points $T^{i_0}(x), \dots, T^{i_{2n}}(x), T^{i_0}(y), \dots, T^{i_{2n}}(y)$ sont tous distincts.*

Démonstration. Si x et y ne sont pas dans la même orbite, on peut prendre les entiers $\{0, 1, 2, \dots, 2n\}$. Sinon, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $y = T^l x$. Si x n'est pas périodique, on peut prendre les entiers $\{0, l+1, 2(l+1), \dots, 2n(l+1)\}$. Si x est périodique de période p , alors on construit les indices par récurrence. On peut prendre i_0 quelconque. Ensuite, supposons i_0, i_1, \dots, i_k déjà construits. Comme $p > 6n$ et $k < 2n$, on peut trouver un entier i_{k+1} qui n'appartient pas à l'ensemble :

$$\{I + p\mathbb{Z}\} \cup \{I + l + p\mathbb{Z}\} \cup \{I - l + p\mathbb{Z}\}$$

où $I = \{i_0, i_1, \dots, i_k\}$. □

Théorème 3. *Soit X un espace compact métrisable de dimension finie, et T un homéomorphisme sur X sans point périodique. Alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $([0, 1]^d, \sigma)$.*

Démonstration. On va utiliser la méthode décrite dans la section précédente. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$, et $m = 2\dim(X) + 1$. Alors d'après le lemme 9, comme (X, T) est apériodique, on peut trouver des entiers i_1, i_2, \dots, i_m tels que les points $T^{i_1}(x_0), \dots, T^{i_m}(x_0), T^{i_1}(y_0), \dots, T^{i_m}(y_0)$ sont tous distincts. Alors on peut trouver deux voisinages compacts respectifs de x_0 et y_0 , U et V , tels que $T^{i_1}(U), \dots, T^{i_m}(U), T^{i_1}(V), \dots, T^{i_m}(V)$ sont deux à deux disjoints. On pose alors $K = U \times V$.

Il suffit de montrer que pour tout K de cette forme, D_K est dense dans $C(X, [0, 1])$. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C(X, [0, 1])$. On considère l'application ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi : U \cup V &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (f(T^{i_1}(x)), \dots, f(T^{i_m}(x))) \end{aligned}$$

ϕ est une application continue et $m \geq 2\dim(X) + 1 \geq 2\dim(U \cup V) + 1$ donc d'après le théorème 2, il existe un plongement $\psi : U \cup V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que $\|\phi - \psi\|_{\infty, U \cup V} < \epsilon$.

Alors on peut définir sur $Z = \bigcup_{i=1}^m T^i(U) \cup \bigcup_{i=1}^m T^i(V)$ une fonction h telle que :

$$\forall z \in T^i(U) \cup T^i(V), h(z) = \psi(T^{-i}(z))|_i$$

Alors h est continue et vérifie : $\|h - f|_Z\|_{\infty} < \epsilon$. D'après le théorème d'extension de Tietze, on peut prolonger h en une fonction $\tilde{f} \in C(X, [0, 1])$, telle que $\|\tilde{f} - f\|_{\infty} < \epsilon$. Alors \tilde{f} est dans D_K . En effet, si $(x, y) \in K$, par injectivité de ψ , il existe $k \leq m$ tel que $\psi(x)|_k \neq \psi(y)|_k$. Donc $\tilde{f}(T^{i_k}(x)) \neq \tilde{f}(T^{i_k}(y))$. Finalement on a prouvé que D_K est dense dans $C(X, [0, 1])$. □

On ne peut pas supprimer l'hypothèse de finitude dans le théorème de plongement de Jaworski : d'après la proposition 21, il existe un système dynamique minimal (X, T) tel que $\dim(X, T) > 1$. Ce système ne se plonge pas dans $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ (sinon on aurait $\dim(X, T) \leq 1$), et est apériodique. En effet, si x est un point périodique de (X, T) , son orbite est finie et dense dans X . Donc X est réduit à cette orbite. Donc (X, T) se plonge dans $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. C'est une contradiction.

Il a fallu attendre l'introduction de la moyenne dimension pour construire un tel contre-exemple (dû à E.Lindenstrauss et B.Weiss).

On ne peut pas non plus supprimer l'hypothèse d'apériodicité. Par exemple, considérons la sphère unité \mathbb{S}^2 dans \mathbb{R}^3 , munie de la symétrie par rapport à l'équateur, s . Alors si (\mathbb{S}^2, τ) se plonge dans $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, l'ensemble de ses points fixes, qui est un cercle (l'équateur), se plonge dans l'ensemble des points fixes de $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, qui est homéomorphe à $[0, 1]$. C'est impossible.

Cependant, il est possible d'affaiblir l'hypothèse d'apériodicité. On peut seulement supposer que $P_{6n} = \emptyset$, puisqu'on pourra toujours utiliser le lemme 9.

3.3 La conjecture de Lindenstrauss-Tsukamoto

On a vu en introduction qu'on cherchait quand un système (X, T) pouvait se plonger dans un décalage $([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma$, d étant le plus petit possible. On cherche en quelque sorte à étendre le théorème de Jaworski.

La moyenne dimension va nous fournir un outil pour distinguer entre des systèmes qui seront tous de dimension infinie. En revanche, un critère de la forme $P_n = \emptyset$ ne semble pas satisfaisant. En effet, la présence de points périodiques, quand elle n'est pas trop importante, peut ne pas créer d'obstruction à un plongement. Si on reprend l'exemple précédent de la sphère (\mathbb{S}^2, τ) , malgré la présence de points fixes, on a un plongement de (\mathbb{S}^2, τ) dans le décalage $([0, 1]^2)^{\mathbb{Z}}, \sigma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (\dots, (x_1 + x_3, x_2), (x_1 - x_3, x_2), (x_1 + x_3, x_2), (x_1 - x_3, x_2), \dots) \end{aligned}$$

Cela motive l'introduction de la dimension périodique.

Définition 18. On définit la dimension périodique de (X, T) par :

$$\text{perdim}(X, T) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\dim(P_k)}{k}$$

Exemple 3. Un système apériodique est de dimension périodique nulle. En revanche, un système peut être de dimension périodique nulle et admettre des points périodiques.

Exemple 4. On a $\text{perdim}([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma = d$. En effet, si $k \in \mathbb{N}$, en notant H_i l'ensemble des points périodiques de période i , on a :

$$\dim(P_k) = \dim(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k) = \max_{0 \leq i \leq k} (\dim(H_i)) = kd$$

Proposition 24. Si \tilde{X} est un sous-ensemble fermé de X , invariant par T , alors si \tilde{T} désigne la restriction de T à \tilde{X} , on a $\text{perdim}(\tilde{X}, \tilde{T}) \leq \text{perdim}(X, T)$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si x est un point périodique de période inférieure à k pour (\tilde{X}, \tilde{T}) , il l'est aussi pour (X, T) . Donc $\text{perdim}(\tilde{X}, \tilde{T}) \leq \text{perdim}(X, T)$. \square

En particulier, une condition nécessaire pour que le système dynamique (X, T) se plonge dans $([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma$ est : $\text{perdim}(X, T) \leq d$.

Proposition 25. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $\text{perdim}(X, T^m) \leq m \text{perdim}(X, T)$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors si x est un point périodique de période k pour T^m , c'est un point périodique de période mk pour T . On a donc $\dim(P_k) \leq m \times \sup_{i \geq 0} \frac{\dim(P_i)}{i}$. D'où finalement $\text{perdim}(X, T^m) \leq m \text{perdim}(X, T)$. \square

La conjecture de Lindenstrauss-Tsukamoto s'énonce ainsi : Si $\text{mdim}(X, T) < \frac{d}{2}$ et $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$, alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Le théorème de Jaworski entre dans le cadre de la conjecture, avec $d=1$, car la moyenne dimension et la dimension périodique sont tous les deux nuls. Dans la suite, on présente différents résultats qui sont tous des cas particuliers de la conjecture. On utilise à chaque fois la méthode décrite dans la section 3.1. La difficulté est toujours de montrer la densité des espaces considérés : chaque démonstration est précédée d'un lemme d'approximation. Quelques lemmes techniques, nécessaires à leur démonstration, ont été placés dans la section finale.

3.4 Plongement de l'ensemble des points périodiques

On considère ici une première méthode : dans [Gut14], on parvient à étendre la démonstration de Jaworski au cas où $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$, en plongeant l'ensemble des points périodique dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{N}}, \sigma)$.

On rappelle la définition suivante :

Définition 19. Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^m . Alors on dit qu'elle est affinement indépendante si $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_r - v_1\}$ est une famille libre. Cela équivaut à ce que si $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0$ et $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$, alors tous les coefficients λ_i sont nuls.

Notation 3. Soient $n_1 \geq n_2$ deux entiers et v un vecteur de taille n_2 . Alors on note v^{*n_1} le vecteur de taille n_1 défini par :

$$\forall 1 \leq k \leq n_1, v^{*n_1}|_k = v|_{k \bmod n_2}$$

Lemme 10. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 \geq n_2$, et $R_1, R_2 \subset X$ des ensembles fermés disjoints. Pour $i = 1, 2$, soit α_i un recouvrement ouvert de R_i tel que $\text{ord}(\alpha_i) < \frac{dn_i}{2}$. Pour tout $U \in \alpha_i$, on se donne un point $q_U \in U$ et un n_i -uplet $v_U \in ([0, 1]^d)^{n_i}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors on peut trouver deux fonctions continues $F_i : X \rightarrow ([0, 1]^d)^{n_i}$ pour $i = 1, 2$ telles que :

1. $\forall U \in \alpha_i, \|F_i(q_U) - v_U\|_{\infty} < \epsilon$
2. $\forall x \in R_i, F_i(x) \in \text{Conv}(\{F_i(q_U) | x \in U\})$
3. si $x_1 \in R_1$ et $x_2 \in R_2$, $F_1(x_1) \neq F_2(x_2)^{*n_1}$

Démonstration. On va définir les fonctions F_i ainsi :

$$\forall x \in X, F_i(x) = \sum_{U \in \alpha_i} \rho_U(x) \vec{v}_U$$

où $\{\rho_U\}_{U \in \alpha_i}$ est une partition de l'unité subordonnée à α_i telle que pour tout $U \in \alpha_i$, $\rho_U(q_U) = 1$. Pour $U \in \alpha_2$, $\vec{v}_U = v_U$ et pour $U \in \alpha_1$, on définira \vec{v}_U par la suite. La propriété 2. sera alors immédiatement vérifiée.

Quant à la propriété 3., elle s'écrit :

$$\text{si } x \in R_1 \text{ et } y \in R_2, \sum_{U \in \alpha_1^x} \rho_U(x) \vec{v}_U - \sum_{U \in \alpha_2^y} \rho_U(y) \vec{v}_U^{*n_1} \neq 0$$

où on a posé :

$$\alpha_i^x = \{U \in \alpha_i \mid \rho_U(x) > 0\}$$

On a affaire à une combinaison d'au plus $\text{ord}(\alpha_1) + \text{ord}(\alpha_2) + 2$ vecteurs. Or $\text{ord}(\alpha_1) \leq \frac{n_1 d}{2} - \frac{1}{2}$ et $\text{ord}(\alpha_2) \leq \frac{n_2 d}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{n_1 d}{2} - \frac{1}{2}$. Donc il s'agit d'au plus $n_1 d + 1$ vecteurs.

Fixons dans un premier temps $(x, y) \in (R_1, R_2)$. Soit E le sous-espace de $([0, 1]^d)^{n_1}$ engendré par la famille $\{\vec{v}_U^{*n_1} \mid U \in \alpha_2^y\}$. Alors $\dim(E) \leq \text{card}(\alpha_2^y) \leq \frac{n_2 d}{2} + \frac{1}{2}$. On considère deux cas.

Supposons que $\dim(E) = \frac{n_2 d}{2} + \frac{1}{2}$. Alors la famille $\{\vec{v}_U^{*n_1} \mid U \in \alpha_2^y\}$ est libre. Donc d'après le lemme 16 (cas 2) dans la section 3.6, pour presque tout choix de $\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ dans $([0, 1]^{dn_1})^{\text{card}(\alpha_1^x)}$, les vecteurs de $\{\vec{v}_U^{*n_1} \mid U \in \alpha_2^y\} \cup \{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ sont affinement indépendants. Supposons alors :

$$\sum_{U \in \alpha_1^x} \rho_U(x) \vec{v}_U - \sum_{U \in \alpha_2^y} \rho_U(y) (\vec{v}_U|_{k \bmod n_2})_{k=1}^{n_1} = 0$$

Comme les sommes $\sum_{U \in \alpha_1^x} \rho_U(x)$ et $\sum_{U \in \alpha_2^y} \rho_U(y)$ sont égales à 1, la somme des coefficients en jeu est nulle, or ces coefficients sont tous différents de 0, c'est une contradiction.

Dans l'autre cas, si $\dim(E) < \frac{n_2 d}{2} + \frac{1}{2}$, alors d'après le lemme précédent, pour presque tout choix de $\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ dans $([0, 1]^{dn_1})^{\text{card}(\alpha_1^x)}$, les espaces $\text{Vect}(\{\vec{v}_U^{*n_1} \mid U \in \alpha_2^y\})$ et $\text{Vect}(\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x})$ sont complémentaires, et la famille $\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ est libre. Supposons alors :

$$\sum_{U \in \alpha_1^x} \rho_U(x) \vec{v}_U = \sum_{U \in \alpha_2^y} \rho_U(y) \vec{v}_U^{*n_1}$$

Comme $\text{Vect}(\{\vec{v}_U^{*n_1} \mid U \in \alpha_2^y\})$ et $\text{Vect}(\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x})$ sont complémentaires, on obtient :

$$\sum_{U \in \alpha_1^x} \rho_U(x) \vec{v}_U = 0$$

Comme $\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ est libre, tous les coefficients en jeu dans cette combinaison linéaire sont nuls, ce qui est une contradiction.

Finalement, comme il existe un nombre fini de familles de la forme α_1^x et α_2^y , on peut choisir la famille $\{\vec{v}_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ dans un ensemble de complémentaire négligeable dans $([0, 1]^{dn_1})^{\text{card}(\alpha_1^x)}$, donc de façon à vérifier la propriété 1. \square

Lemme 11. Soient $n, l \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq l \leq n - 1$. Soit R un sous-ensemble fermé de X tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}, R \cap T^i R = \emptyset$. Soit α_i un recouvrement ouvert de R tel que $\text{ord}(\alpha) < \frac{dn}{2}$. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $U \in \alpha$, on se donne un point $q_U \in U$ et un N -uplet $v_U \in ([0, 1]^d)^n$. Alors on peut trouver une fonction continue $F : R \rightarrow ([0, 1]^d)^n$ telle que :

1. $\forall U \in \alpha, \|F(q_U) - v_U\|_\infty < \epsilon$
2. $\forall x \in R, F(x) \in \text{Conv}(\{F(q_U) \mid x \in U\})$
3. si $x, y \in R, F(x) \neq (F(y))^{\bullet l}$ où pour un vecteur v de taille $n > l$, le vecteur $v^{\bullet l}$ de taille n est défini par : $v^{\bullet l}|_k = v_{k+l \bmod n}$

Démonstration. On définit la fonction F ainsi :

$$\forall x \in R, F(x) = \sum_{U \in \alpha_i} \rho_U(x) v_{\vec{U}}$$

où $\{\rho_U\}_{U \in \alpha_i}$ est une partition de l'unité subordonnée à α telle que pour tout $U \in \alpha_i$, $\rho_U(q_U) = 1$. On définira $\{v_{\vec{U}}\}_{U \in \alpha}$ par la suite. La propriété 2. sera alors immédiatement vérifiée.

Pour $x \in R$, on pose : $\alpha_x = \{U \in \alpha \mid \rho_U(x) > 0\}$. Alors la propriété 3 pour x s'écrit :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, nd - 1\}, \sum_{U \in \alpha_x} \rho_U(x) v_{\vec{U}}|_i \neq \sum_{U \in \alpha_y} \rho_U(y) v_{\vec{U}}|_{i+dl \bmod nd}$$

Pour tout U dans α , on définit un vecteur d'entiers $V_U = (v_U^1, v_U^2, \dots, v_U^{nd}) \in \mathbb{N}^{nd}$, de manière à ce que les indices v_U^i soient tous distincts (U décrivant α et i décrivant $\{1, \dots, nd\}$). Soit alors M la matrice dont les colonnes sont les vecteurs V_U pour $U \in \alpha_x$ et $V_U^{\bullet dl}$ pour $U \in \alpha_y$. M a nd lignes et au plus $nd+1$ colonnes car $D(\text{ord}(\alpha) + 1) \leq nd + 1$. Comme $1 \leq l \leq n - 1$, il n'y a pas de coefficients égaux sur une même ligne ou une même colonne.

Supposons que le nombre de colonnes, k , est inférieur ou égal à nd . Alors, en ne gardant que les k premières lignes de M , on obtient une matrice carrée à laquelle on peut appliquer le lemme 17. Donc pour presque tout choix de vecteurs $(v_U)_{U \in \alpha}$, la famille $\{(v_U)_{U \in \alpha_x} \cup (v_U^{\bullet l})_{U \in \alpha_y}\}$ est une famille libre.

Supposons maintenant que $k = nd + 1$. $nd + 1 = 2(\text{ord}(\alpha) + 1)$ donc $nd+1$ est pair. En appliquant le lemme 18 de la section 3.6. à $i = \frac{nd+1}{2}$, on obtient que pour presque tout choix de vecteurs $(v_U)_{U \in \alpha}$, les vecteurs de $\{(v_U)_{U \in \alpha_x} \cup (v_U^{\bullet l})_{U \in \alpha_y}\}$ sont affinement indépendants.

Finalement, dans les deux cas, on peut conclure comme dans le lemme 10.

□

On rappelle qu'on note P l'ensemble des points périodiques, et pour $n \in \mathbb{N}$, H_n l'ensemble des points périodiques de période n .

Théorème 4. *Supposons que $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$. Alors l'espace $D_{(P \times P) \setminus \Delta}$ est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$.*

Démonstration. On va utiliser la méthode décrite dans la section 3.1. On a :

$$(P \times P) \setminus \Delta = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \times H_n \right) \setminus \Delta \cup \left(\bigcup_{n \neq m} H_n \times H_m \right)$$

$(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \times H_n) \setminus \Delta$ et $(\bigcup_{n \neq m} H_n \times H_m)$ sont deux espaces de Lindelöf.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \in H_n$. On peut trouver un voisinage U_x de x_n dans H_n tel que $\bar{U}_x \subset H_n$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \bar{U}_x \cap T^i \bar{U}_x = \emptyset$. On peut donc recouvrir l'espace $(\bigcup_{n \neq m} H_n \times H_m)$ par des compacts de la forme $K = \bar{U}_{x_n} \times \bar{U}_{y_m}$.

Soit maintenant $(x, y) \in (H_n \times H_n) \setminus \Delta$. Alors on définit un voisinage compact K de la forme $\bar{V}_x \times \bar{V}_y$, où V_x et V_y sont des voisinages respectifs de x et de y dans H_n , vérifiant :

1. $\bar{V}_x \subset H_n$ et $\bar{V}_y \subset H_n$
2. $\bar{V}_x \times \bar{V}_y \subset (P \times P) \setminus \Delta$
3. si $S, Tx, \dots, T^{n-1}x, y, Ty, \dots, T^{n-1}y$ sont deux à deux distincts, V_x et V_y doivent être choisis tels que $\bar{V}_x, T\bar{V}_x, \dots, T^{n-1}\bar{V}_x, \bar{V}_y, T\bar{V}_y, \dots, T^{n-1}\bar{V}_y$ sont deux à deux disjoints.
4. si en revanche il existe $1 \leq k \leq n-1$ tel que $y = T^k x$, on choisit V_x tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \bar{V}_x \cap T^i \bar{V}_x = \emptyset$ et on pose $V_y = T^k V_x$.

On obtient un recouvrement de $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \times H_n) \setminus \Delta$ par des compacts de la forme $K = \bar{V}_x \times \bar{V}_y$.

Il reste à montrer que tous les ensembles D_K considérés sont denses dans $C(X, [0, 1]^d)$. Supposons que K s'écrive $R_1 \times R_2$ où $\bar{R}_1 \subset H_{n_1}$ et $\bar{R}_2 \subset H_{n_2}$.

Soient $\tilde{f} \in C(X, [0, 1]^d)$ et $\epsilon > 0$. Comme $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$, on a $\frac{\dim(\bar{R}_1)}{n_1} < \frac{d}{2}$ et $\frac{\dim(\bar{R}_2)}{n_2} < \frac{d}{2}$. Pour $i = 1, 2$, on peut donc choisir α_i un recouvrement ouvert de R_i tel que $\text{ord}(\alpha_i) < \frac{dn_i}{2}$, et $\max_{U \in \alpha_i; 0 \leq k \leq n_i-1} \text{diam}(\tilde{f}(T^k U)) < \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout $U \in \alpha_i$, on se donne un point $q_U \in U$ et on définit $v_U = (\tilde{f}(T^k q_U))_{k=0}^{n_i-1}$.

On distingue alors deux cas.

Dans le premier cas, on suppose que $\bar{R}_1, T\bar{R}_1, \dots, T^{n_1-1}\bar{R}_1, \bar{R}_2, T\bar{R}_2, \dots, T^{n_2-1}\bar{R}_2$ sont deux à deux disjoints. Cela correspond à la propriété 3 dans le choix d'un voisinage de $(x, y) \in (H_n \times H_n) \setminus \Delta$ et au cas où K est un voisinage de $(x, y) \in (\bigcup_{n \neq m} H_n \times H_m)$ (en effet, $\bigcup_{i=1}^{n_1} T^i \bar{R}_1 \subset H_{n_1}$, $\bigcup_{i=1}^{n_2} T^i \bar{R}_2 \subset H_{n_2}$ et H_{n_1} et H_{n_2} sont disjoints). Alors en appliquant le lemme 10 à R_1 et R_2 , on obtient deux fonctions continues F_1 et F_2 .

On peut alors définir une fonction f' sur $Z = \bigcup_{k=0}^{n_1-1} T^k \bar{R}_1 \cup \bigcup_{k=0}^{n_2-1} T^k \bar{R}_2$ en posant :

$$\forall z \in \bar{R}_i, \forall 0 \leq k \leq n_i - 1, f'(T^k z) = F_i(z)|_k$$

D'après les propriétés 1 et 2 dans le lemme 10, on obtient $\|\tilde{f}|_Z - f'\| < \epsilon$. D'après le théorème d'extension de Tietze, on peut prolonger f' en une fonction $f \in C(X, [0, 1]^d)$ telle que $\|\tilde{f} - f\| < \epsilon$. Alors f appartient à D_K . En effet, supposons qu'il existe $(x, y) \in K$ tel que $\forall a \in \mathbb{Z}, f(T^a x) = f(T^a y)$. Alors en particulier $(f(x), \dots, f(T^{n_1-1}x)) = (f(y), \dots, f(T^{n_1-1}y))$. On remarque que pour $n_1 > i \geq n_2, f(T^i y) = F_2(y)|_{i \bmod n_2}$. En effet, si on pose $k = i \bmod n_2$, comme $y \in \bar{R}_2 \subset H_{n_2}$, on a $T^i y = T^k y$. Donc $F_1(x) = (F_2(y)|_{k \bmod n_2})_{k=1}^{n_1}$, ce qui est impossible.

Dans l'autre cas, K est un voisinage de $(x, y) \in (H_n \times H_n) \setminus \Delta$ vérifiant la propriété 4. On pose $n = n_1 = n_2$. $\bar{R}_1, T\bar{R}_1, \dots, T^{n-1}\bar{R}_1$ sont deux à deux disjoints mais il existe $1 \leq l \leq n-1$ tel que $\bar{R}_2 = T^l \bar{R}_1$. On peut appliquer le lemme 11 à R_1 . On obtient une fonction continue F . On procède de même que dans le premier cas : on définit une fonction f' sur $Z = \bigcup_{k=0}^{n-1} T^k \bar{R}_1$ par :

$$\forall z \in \bar{R}_1, \forall 0 \leq k \leq n-1, f'(T^k z) = F(z)|_k$$

Et on prolonge cette fonction f' en une fonction $f \in C(X, [0, 1]^d)$ telle que $\|\tilde{f} - f\| < \epsilon$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in K$ tel que $\forall a \in \mathbb{Z}, f(T^a x) = f(T^a y)$. Alors en particulier $(f(x), \dots, f(T^{n-1}x)) = (f(y), \dots, f(T^{n-1}y))$, donc $F(x) = (F(y))^{\bullet l}$, ce qui est impossible.

□

Ici on parvient ainsi à démontrer la conjecture de Lindenstrauss-Tsukamoto dans le cas où X est de dimension finie.

Lemme 12. Soient N et n dans \mathbb{N} . Soit α un recouvrement ouvert de X tel que $\text{ord}(\alpha) + 1 \leq (N - 1 - n)\frac{d}{2}$. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $U \in \alpha$, on se donne un point $q_U \in U$ et un N -uplet $v_U \in ([0, 1]^d)^N$. Alors on peut trouver une fonction continue $F : X \rightarrow ([0, 1]^d)^N$ telle que :

1. $\forall U \in \alpha, \|F(q_U) - v_U\|_\infty < \epsilon$
2. $\forall x \in X, F(x) \in \text{Conv}(\{F_i(q_U) | x \in U\})$
3. si $x \in X$, $F(x)|_1^{N-1} \notin V_{N-1}^n$, où

$$V_{N-1}^n = \{z \in ([0, 1]^d)^{N-1} \mid \forall 0 \leq a, b \leq N, (a = b \bmod n) \Rightarrow z_a = z_b\}$$

Démonstration. On définit la fonction F ainsi :

$$\forall x \in X, F(x) = \sum_{U \in \alpha} \rho_U(x) v_U$$

où $\{\rho_U\}_{U \in \alpha}$ est une partition de l'unité subordonnée à α telle que pour tout $U \in \alpha$, $\rho_U(q_U) = 1$. On définira $\{v_U\}_{U \in \alpha}$ par la suite. La propriété 2. sera alors immédiatement vérifiée.

Soit $x \in X$. On pose : $\alpha_x = \{U \in \alpha \mid \rho_U(x) > 0\}$. Alors la propriété 3 pour x s'écrit :

$$\sum_{U \in \alpha_x} (\rho_U(x) v_U|_1^{N-1}) \notin V_{N-1}^n$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire d'au plus $\text{ord}(\alpha) + 1$ vecteurs. On va utiliser le cas 1. dans le lemme 16 de la section 3.6., avec $r \leq \text{ord}(\alpha) + 1$ et $s = nd$ car $\dim(V_{N-1}^n) = nd$. Alors comme $\text{ord}(\alpha) + 1 + nd \leq (N - 1)d$, pour presque tout choix de $\{v_U\}_{U \in \alpha}$ dans $(([0, 1]^d)^{N-1})^{\text{ord}(\alpha)+1}$, les espaces $\text{Vect}(\{v_U\}_{U \in \alpha})$ et V_{N-1}^n sont complémentaires. Comme ses coefficients sont non nuls, la combinaison $\sum_{U \in \alpha_x} (\rho_U(x) v_U|_1^{N-1})$ est non nulle donc ne peut pas être dans V_{N-1}^n .

Comme il y a un nombre fini d'ensembles de la forme α_x , on en déduit qu'on peut choisir la famille $\{v_U\}_{U \in \alpha}$ de manière à ce qu'elle vérifie la propriété 1.

□

Théorème 5. Supposons que X est de dimension finie n , et $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$. Alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Démonstration. Posons $\Gamma = (X \times X) \setminus (\Delta \cup (P \times P))$. On peut écrire $\Gamma = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = (P \times X \setminus P) \cup (X \setminus P \times P)$ et $D_2 = \Gamma \setminus D_1$.

Soit $(x, y) \in D_1$. Par exemple on peut supposer que x n'est pas un point périodique et que $y \in H_m$ où $n \in \mathbb{N}$. On choisit $S \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 \leq (S - \frac{m}{2})d$. On peut trouver un voisinage ouvert de x tel que $U \subset X \setminus P$ et tel que pour $l \in \{0, 1, \dots, 2S\}$, $\bar{U} \cap T(\bar{U}) = \emptyset$. Enfin on choisit un voisinage W de y tel que $W \subset \bar{W} \subset H_m$, et on définit $K = \bar{U} \times \bar{X}$.

Montrons que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$. Soit $f \in C(X, [0, 1]^d)$ et $\epsilon > 0$. \bar{U} et \bar{W} sont des compacts disjoints donc $\text{dist}(\bar{U}, \bar{X}) > 0$. On peut supposer sans perte de généralité que $\epsilon < \text{dist}(\bar{U}, \bar{X})$. Soit α un recouvrement ouvert fini de \bar{U} tel que $\text{ord}(\alpha) \leq n$, $\max_{V \in \alpha, k \in \{0, 1, \dots, 2S\}} \text{diam}(f(T^k(V))) < \frac{\epsilon}{2}$, et $\max_{V \in \alpha} \text{diam}(V) < \epsilon$. Pour tout $V \in \alpha$ on choisit un point $q_V \in V$ et on note : $\tilde{v}_V = (f(T^k(q_V)))_{k \in \{0, 1, \dots, 2S\}}$. On peut alors appliquer le lemme 12 aux entiers $2S+1$ et m . On obtient une fonction continue $F : X \rightarrow ([0, 1]^d)^{2S+1}$.

Posons $Z = \bigcup_{k=0}^{2S} T^k(\bar{U})$. On définit $g : Z \rightarrow [0, 1]^d$ par :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2S\}, \forall z \in \bar{U}, g(T^k(z)) = F(z)_k$$

Alors comme dans le théorème précédent, on peut prolonger g en une fonction \tilde{f} telle que $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \epsilon$. Alors \tilde{f} est dans D_K . En effet, supposons qu'il existe $(x, y) \in K$ tel que $\forall a \in \mathbb{Z}, f(T^a x) = f(T^a y)$. Alors en particulier $(f(Tx), \dots, f(T^{2S}x)) = (f(Ty), \dots, f(T^{2S}y))$. Comme $(f(Ty), \dots, f(T^{2S}y)) \in V_{2S}^m$, on en déduit que $F(x)|_1^{2S} \in V_{2S}^m$, ce qui est impossible. Finalement, on a prouvé que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$.

On va conduire un raisonnement analogue dans le deuxième cas : soit $(x, y) \in D_2$. Alors d'après le lemme 9, on peut trouver des indices i_0, i_1, \dots, i_{2n} tels que les points $T^{i_0}(x), \dots, T^{i_{2n}}(x), T^{i_0}(y), \dots, T^{i_{2n}}(y)$ sont tous distincts. Alors on peut trouver deux voisinages compacts respectifs de x et y , U_1 et U_2 , tels que $T^{i_0}(U_1), \dots, T^{i_{2n}}(U_1), T^{i_0}(U_2), \dots, T^{i_{2n}}(U_2)$ sont deux à deux disjoints. On pose alors $K = U_1 \times U_2$.

Montrons que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$. Soit $f \in C(X, [0, 1]^d)$ et $\epsilon > 0$. On peut supposer sans perte de généralité que $\epsilon < \text{dist}(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$. Pour $i = 1, 2$, soit α_i un recouvrement ouvert de U_i tel que $\text{ord}(\alpha_i) < n, \max_{V \in \alpha_i, k \in \{0, 1, \dots, 2n\}} \text{diam}(f(T^k(V))) < \epsilon$, et $\max_{V \in \alpha_i} \text{diam}(V) < \epsilon$. Pour tout $U \in \alpha_i$, on se donne un point $q_U \in U$ et on pose $v_U = (f(T^{i_k} q_U))_{k=0}^{2n}$. On peut alors appliquer le lemme 10 en posant $n_1 = n_2 = n$. On obtient deux fonctions continues F_1 et F_2 .

Posons $Z = \bigcup_{k=0}^{2n} T^k(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)$. On définit $g : Z \rightarrow [0, 1]^d$ par :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, \forall z \in \bar{U}_i, g(T^k(z)) = F_i(z)_k$$

Alors comme précédemment, on peut prolonger g en une fonction \tilde{f} telle que $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \epsilon$. Alors \tilde{f} est dans D_K . En effet, supposons qu'il existe $(x, y) \in K$ tel que $\forall a \in \mathbb{Z}, f(T^a x) = f(T^a y)$. Alors en particulier $(f(T^{i_0} x), \dots, f(T^{i_{2n}} x)) = (f(T^{i_0} y), \dots, f(T^{i_{2n}} y))$, c'est-à-dire $F_1(x) = F_2(y)$. C'est une contradiction. Finalement, on a prouvé que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$. \square

On considère maintenant un système dynamique : $(X, T) = (\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} T_i)$, produit dénombrable de systèmes dynamiques (X_i, T_i) , où X_i est un espace compact métrisable de dimension finie et T_i un homéomorphisme sur X_i .

On notera $X^{(n)}$ le produit fini $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ et $T^{(n)}$ le produit fini $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$.

Proposition 26. *Supposons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) < \frac{d}{2}$. Alors le système dynamique (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.*

Démonstration. Soient $x^{(0)}$ et $y^{(0)}$ distincts dans X . Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k^{(0)} \neq y_k^{(0)}$. On peut trouver deux compacts U et V dans X , voisinages respectifs de $x^{(0)}$ et $y^{(0)}$, tels que si $(x, y) \in U \times V$, alors $x_k \neq y_k$. Posons $K = U \times V$.

On va utiliser la méthode décrite dans la section 3.1. Il reste donc à montrer que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$.

Soit $f \in C(X, [0, 1]^d)$, et $\epsilon > 0$. f est uniformément continue sur X . Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $d(x, y) < \eta$ alors $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Soit n un entier supérieur à k , tel que si x et y ont leurs n premières coordonnées égales, alors $d(x, y) < \eta$. Soit $z \in X$. Posons :

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow [0, 1]^d \\ x &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \dots) \end{aligned}$$

Alors $h \in C(X, [0, 1]^d)$, $\|f - h\| < \frac{\epsilon}{2}$, et $h(x)$ ne dépend que des n premières coordonnées de x . On peut donc définir :

$$\begin{aligned}\tilde{h} : X^{(n)} &\longrightarrow [0, 1]^d \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto h(x_1, \dots, x_n, z_{n+1}, \dots)\end{aligned}$$

Comme $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) < \frac{d}{2}$, on peut supposer, quitte à prendre un n plus grand, que $\text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) < \frac{d}{2}$. Alors comme $X^{(n)}$ est de dimension finie, d'après le théorème précédent, il existe une fonction $\tilde{f} \in C(X^{(n)}, [0, 1]^d)$ telle que $\|\tilde{f} - \tilde{h}\| < \frac{\epsilon}{2}$ et telle que si x et y sont deux éléments distincts de $X^{(n)}$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que : $\tilde{f}(T^i(x)) \neq \tilde{f}(T^i(y))$. On pose alors :

$$\begin{aligned}f' : X &\longrightarrow [0, 1]^d \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Alors $\|f' - h\| < \frac{\epsilon}{2}$, donc $\|f' - f\| < \epsilon$, et $f' \in D_K$.

On en déduit que D_K est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$, puis que finalement $D_{(X \times X) \setminus \Delta}$ est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$. \square

Exemple 5.

La condition $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) < \frac{d}{2}$ est strictement plus contraignante que $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la proposition 24, $\text{perdim}(X, T) \leq \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)})$. Donc si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) < \frac{d}{2}$, on a $\text{perdim}(X, T) < \frac{d}{2}$.

D'autre part, considérons le système dynamique $(X, T) = (\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} T_i)$, où pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est le tore de dimension 1, et T_i est l'application identité, sauf si i est une puissance de 2 : alors T_i est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{i}$. Alors $\text{perdim}(X, T) = 0$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \text{perdim}(X^{(n)}, T^{(n)}) \leq 2$.

3.5 n-marqueurs

3.5.1 n-marqueurs

Définition 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-ensemble de X . On dit que c'est un n -marqueur de (X, T) si :

1. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, F \cap T^i(F) = \emptyset$
2. $\exists m \in \mathbb{N}, X = \bigcup_{i=1}^m T^i(F)$

On dit que (X, T) a la propriété de marqueur si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un n -marqueur ouvert de (X, T) .

Définition 21. (X, T) a la propriété topologique forte de Rokhlin si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'en définissant :

$$E_f = \{x \in X \mid f(T(x)) \neq f(x) + 1\}$$

on ait :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, E_f \cap T^i(E_f) = \emptyset$$

Théorème 6. (X, T) a la propriété de marqueur si et seulement si (X, T) a la propriété topologique forte de Rokhlin.

Démonstration. Supposons que (X, T) a la propriété topologique forte de Rokhlin. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, E_f \cap T^i(E_f) = \emptyset$$

Alors $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} T^i(E_f)$. En effet, supposons qu'il existe $y \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} T^i(E_f)$. Alors la suite $(f(T^{-i}(y)))_{i \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$. C'est impossible car la fonction f étant continue sur le compact X , elle est bornée. Finalement, par compacité de X , il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^m T^i(E_f)$. Comme E_f est ouvert, finalement E_f est un n -marqueur. Donc (X, T) a la propriété de marqueur.

Réciproquement, supposons que (X, T) a la propriété de marqueur. Soit $n \in \mathbb{N}$ et F un n -marqueur. Soit U un ouvert de X , contenant F , tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, U \cap T^i U = \emptyset$.

Soit $\rho : X \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue qui vaut 1 en tout point de F , et dont le support est inclus dans U . On définit une marche aléatoire sur X comme suit : si à l'instant t on se trouve sur le point y , à l'instant $t+1$, on aura mis fin à la marche avec probabilité $\rho(y)$ et on se place en $T^{-1}(y)$ avec probabilité $1 - \rho(y)$. Comme il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^m T^i(F)$, et que ρ vaut 1 sur F , quelque soit son point de départ, la marche aléatoire s'arrête après au plus m étapes.

Soit f la fonction qui à $x \in X$ associe le nombre d'étapes espéré avant la fin de la marche. Alors $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. De plus, si $x \notin U$, alors $\rho(x) = 0$ donc la marche partant de x se déplace à l'instant suivant vers $T^{-1}x$. Donc $f(T^{-1}x) = f(x) - 1$, c'est-à-dire $T^{-1}x \notin E_f$. On en déduit que $E_f \subset T(U)$. Comme $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, U \cap T^i U = \emptyset$, on en déduit que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, E_f \cap T^i(E_f) = \emptyset$.

Finalement, (X, T) a la propriété topologique forte de Rokhlin. □

Proposition 27. Si (X, T) est un système minimal, il a la propriété de marqueur.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in X$. $x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)$ sont distincts. Donc il existe une boule ouverte B centrée en x vérifiant :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, B \cap T^i(B) = \emptyset$$

L'orbite de x est dense dans X donc $\bigcup_{i=1}^{\infty} T^i(B) = X$. Par compacité de X , il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{i=1}^m T^i(B) = X$. B est donc un n -marqueur ouvert de (X, T) . □

Lemme 13. Supposons que X est de dimension finie d , et (X, T) apériodique. Soit U un ouvert de X . Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert V tel que $\partial U \subset V$, il existe un ouvert U' tel que $U \subset U' \subset U \cup V$, $\partial U' \subset \partial U \cup V$ et toute sous-famille de $\{\partial U', T(\partial U'), \dots, T^{k-1}(\partial U')\}$ de cardinal $> d$ est d'intersection vide.

Lemme 14. Supposons que X est de dimension finie d et (X, T) est un système apériodique. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soient U et V deux ouverts de X . Alors si on pose $m = (2d + 2)N - 1$, et si :

1. $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{U} \cap T^i \bar{U} = \emptyset$
2. $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \bar{V} \cap T^i \bar{V} = \emptyset$

alors il existe un ouvert $W \subset X$ tel que :

1. $\bar{U} \subset \bar{W}$
2. $\bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^m T^i(\bar{W})$
3. $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{W} \cap T^i \bar{W} = \emptyset$

Soit un réel $\rho > 0$ et $A \subset X$. On notera :

$$B_\rho(A) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \rho\}$$

Démonstration. On pose : $R = \bar{V} \setminus \bigcup_{i=1}^m T^i U$ et on va construire l'espace W sous la forme suivante :

$$W = U \cup \bigcup_{H \in \Phi} T^{-c(H)N} H$$

où Φ est un recouvrement ouvert fini de R , et pour tout H dans Φ , $c(H)$ est un entier tel que $1 \leq c(H)N < m$.

Alors on aura : $\bar{U} \subset \bar{W}$ et $\bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^m T^i(\bar{W})$. En effet, soit $x \in V$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^m T^i U$ alors comme $\bar{U} \subset \bar{W}$, $x \in \bigcup_{i=1}^m T^i(\bar{W})$. Sinon, $x \in R$. Alors il existe H dans Φ tel que $x \in H$: d'où $x \in T^{c(H)N} \bar{W}$. Comme $1 \leq c(H)N < m$, on a bien $x \in \bigcup_{i=1}^m T^i(\bar{W})$.

On va de plus construire Φ et $c(H)$ pour tout $H \in \Phi$, de manière à ce que :

1. en posant $O = \bigcup_{H \in \Phi} \bar{H}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}, O \cap T^i(O) = \emptyset$
2. c est une fonction $c : \Phi \rightarrow \{1, \dots, 2d+1\}$ telle que :

$$\forall H \in \Phi, \forall i \in \{-(N-1), \dots, N-1\}, T^i \bar{H} \cap T^{c(H)N} \bar{U} = \emptyset$$

Vérifions qu'alors on aura bien : $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{W} \cap T^i \bar{W} = \emptyset$. Supposons le contraire. Il existe x et y dans \bar{W} et $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ tels que $x = T^i y$. On distingue cinq cas :

1. si x et y sont dans \bar{U} , cela contredit la propriété : $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{U} \cap T^i \bar{U} = \emptyset$
2. s'il existe $H \in \Phi$ tel que x et y sont dans $T^{-c(H)N} \bar{H}$ alors ils sont dans $T^{-c(H)N} O$. Comme $i < m$, cela contredit la propriété énoncée sur O .
3. s'il existe H_1 et H_2 distincts dans Φ tels que $x \in T^{-c(H_1)N} \bar{H}_1$ et $y \in T^{-c(H_2)N} \bar{H}_2$, alors $T^{i+c(H_1)N}(y) \in H_1$ et $T^{c(H_2)N}(y) \in H_2$. Donc ces deux éléments sont dans O . Or $0 < |i + c(H_1)N - c(H_2)N| \leq (2d+1)N < m$. Donc cela contredit la propriété sur O .
4. s'il existe $H \in \Phi$ tel que x est dans $T^{-c(H)N} \bar{H}$ et $y \in \bar{U}$, alors $T^{c(H)N}(x) \in \bar{H} \cap T^{i+c(H)N}(\bar{U})$. Donc $T^i \bar{H} \cap T^{c(H)N} \bar{U} \neq \emptyset$. Cela contredit la propriété énoncée sur c .
5. s'il existe $H \in \Phi$ tel que y est dans $T^{-c(H)N} \bar{H}$ et $x \in \bar{U}$, on conclut comme précédemment.

Construisons maintenant Φ et c .

V vérifie : $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \bar{V} \cap T^i \bar{V} = \emptyset$. Donc R aussi, et on peut donc trouver un réel $\rho > 0$ tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, B_\rho(R) \cap T^i(B_\rho(R)) = \emptyset$.

D'après le lemme 13, quitte à agrandir U tout en gardant la condition : $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{U} \cap T^i \bar{U} = \emptyset$, on peut supposer que toute sous-famille de $\{\partial U, T^1(\partial U), \dots, T^m(\partial U)\}$ de cardinal $> d$ est d'intersection vide.

Alors on peut choisir $0 < \delta < \rho$ tel que :

$$|i \in \{1, \dots, m\}, T^i(\bar{U}) \cap B_\delta(x) \neq \emptyset| \leq d$$

En effet, supposons le contraire. Alors on peut trouver des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R^\mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^\mathbb{N}$ telles que $\delta_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |i \in \{1, \dots, m\}, T^i(\bar{U}) \cap B_\delta(x_n) \neq \emptyset| > d$$

R est fermé dans le compact X donc est compact. On peut donc supposer (quitte à extraire) que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite $x \in R$. De plus, on peut trouver $d+1$ indices dans $\{1, 2, \dots, m\}$, notés i_1, i_2, \dots, i_{d+1} , qui appartiennent chacun à une infinité d'ensembles $\{i \in \{1, \dots, m\}, T^i(\bar{U}) \cap B_\delta(x_n) \neq \emptyset\}$. Alors, quitte à extraire encore de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq l \leq d+1$, un élément $y_n^l \in T^{i_l}(\bar{U})$ tel que $d(y_n^l, x_n) \leq \delta_n$. Alors les suites $(y_n^l)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes vers x . Donc $x \in R \cap \bigcap_{l=1}^{d+1} T^{i_l} \bar{U}$. Donc $\bigcap_{l=1}^{d+1} T^{i_l}(\partial \bar{U}) \neq \emptyset$. C'est une contradiction, donc on peut bien choisir un tel δ .

Par compacité de R , on peut trouver un recouvrement ouvert fini de R , Φ , par des boules fermées de rayon δ . Alors :

$$\forall H \in \Phi, |\{i \in \{1, \dots, m\}, T^i(\bar{U}) \cap \bar{H} \neq \emptyset\}| \leq d$$

En posant $O = \bigcup_{H \in \Phi} \bar{H}$, on a bien : $\forall i \in \{1, \dots, m\}, O \cap T^i(O) = \emptyset$

Enfin, pour $H \in \Phi$, on peut trouver un élément $c(H)$ tel que :

$$\forall i \in \{-(N-1), \dots, N-1\}, T^i \bar{H} \cap T^{c(H)N} \bar{U} = \emptyset$$

En effet, pour $1 \leq k \leq 2d+1$, notons : $I_k = \{kN - (N-1), \dots, kN + N - 1\}$. Or, pour tout k , $I_k \subset \{1, 2, \dots, m\}$ et d'autre part, I_k et I_{k+2} sont disjoints. Donc si $i \in \{i \in \{1, \dots, m\}, T^i(\bar{U}) \cap \bar{H} \neq \emptyset\}$, i est dans au plus deux de ces ensembles I_k . Or il y a au plus d tels indices i . Donc il existe un ensemble I_{k_0} qui ne contient aucun indice i de ce type. En posant $c(H) = k_0$, on obtient la propriété désirée. \square

Théorème 7. *Supposons que (X, T) est un système apériodique de dimension finie. Alors (X, T) a la propriété de marqueur.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons comme dans le lemme 14, on pose $m = (2d+2)N - 1$. Comme (X, T) est apériodique et X compact, on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts U_1, U_2, \dots, U_s tels que :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \bar{U}_j \cap T^i(\bar{U}_j) = \emptyset$$

On va construire un n -marqueur par récurrence. On pose $W_1 = U_1$. Soit $k \leq s$. Supposons qu'il existe un ouvert W_k tel que $\bigcup_{i=1}^k \bar{U}_i \subset \bigcup_{i=0}^k T^i(\bar{W}_k)$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{W}_k \cap T^i \bar{W}_k = \emptyset$. En appliquant le lemme 14 à \bar{W}_k et U_{k+1} , on trouve un ouvert W_{k+1} tel que $\bar{W}_k \subset \bar{W}_{k+1}$, $\bar{U}_{k+1} \subset \bigcup_{i=1}^k T^i(\bar{W}_{k+1})$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \bar{W}_{k+1} \cap T^i \bar{W}_{k+1} = \emptyset$. On a alors $\bigcup_{i=1}^{k+1} \bar{U}_i \subset \bigcup_{i=0}^m T^i(\bar{W}_{k+1})$. Finalement, en posant $W = W_s$, on obtient un n -marqueur W . \square

3.5.2 Application aux plongements

Lemme 15. Soit $S \in \mathbb{N}$. Soit α un recouvrement ouvert fini de X tel que $\text{ord}(\beta) < Sd$. Pour tout $U \in \alpha$, on se donne un point $q_U \in U$ et un N -uplet $v_U \in ([0, 1]^d)^N$. Soit $\epsilon > 0$. Alors on peut trouver une fonction $F : X \rightarrow ([0, 1]^d)^N$ telle que :

1. $\forall U \in \alpha, \|F(q_U) - v_U\|_\infty < \epsilon$
2. $\forall x \in X, F(x) \in \text{Conv}(\{F(q_U) | x \in U\})$
3. s'il existe $0 \leq l < N - 4S$, $\lambda \in]0, 1]$, et $x, y, x', y' \in X$ tels que :

$$\lambda F(x)|_l^{l+4S-1} + (1-\lambda)F(y)|_l^{l+4S} = \lambda F(x')|_l^{l+4S-1} + (1-\lambda)F(y')|_l^{l+4S}$$

alors il existe $U \in \beta$ tel que x et x' sont dans U .

Démonstration. On définit la fonction F ainsi :

$$\forall x \in X, F(x) = \sum_{U \in \alpha} \rho_U(x) v_U$$

où $\{\rho_U\}_{U \in \alpha}$ est une partition de l'unité subordonnée à α telle que pour tout $U \in \alpha$, $\rho_U(q_U) = 1$. On définira $\{v_U\}_{U \in \alpha}$ par la suite. La propriété 2. sera alors immédiatement vérifiée.

Soit $x \in X$. On pose : $\alpha_x = \{U \in \alpha \mid \rho_U(x) > 0\}$. La propriété 3. s'écrit alors :

$$\lambda \sum_{U \in \alpha_x} \rho_U(x) v_U|_l^{l+4S-1} + (1-\lambda) \sum_{U \in \alpha_y} \rho_U(y) v_U|_l^{l+4S} = \lambda \sum_{U \in \alpha_{x'}} \rho_U(x') v_U|_l^{l+4S-1} + (1-\lambda) \sum_{U \in \alpha_{y'}} \rho_U(y') v_U|_l^{l+4S}$$

Considérons la matrice M dont les colonnes sont les vecteurs de $\{v_U|_l^{l+4S-1}\}_{U \in \alpha_x \cup \alpha_{x'}} \cup \{v_U|_l^{l+4S}\}_{U \in \alpha_y \cup \alpha_{y'}}$. Alors comme $\text{ord}(\alpha) < Sd$, M a $4S$ lignes et k colonnes, où $k \leq 4Sd$. On peut alors appliquer le lemme 17 de la section 3.6. à la matrice carrée obtenue à partir de M en ne gardant que les k premières lignes. On en déduit que pour presque tout choix de $\{v_U\}_{U \in \alpha}$, les vecteurs de $\{v_U|_l^{l+4S-1}\}_{U \in \alpha_x \cup \alpha_{x'}} \cup \{v_U|_l^{l+4S}\}_{U \in \alpha_y \cup \alpha_{y'}}$ sont linéairement indépendants, donc la propriété 3. est vérifiée.

Comme précédemment, comme il existe un nombre fini de familles de la forme α_1^x , on peut choisir la famille $\{v_U\}_{U \in \alpha_1^x}$ dans un ensemble de complémentaire négligeable, donc de façon à vérifier aussi la propriété 1.

□

Théorème 8. Supposons que (X, T) est une extension d'un système dynamique (Z, S) apériodique de dimension finie, et que $\text{mdim}(X, T) < \frac{d}{16}$. Alors (X, T) se plonge dans le décalage $(([0, 1]^{d+1})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Démonstration. Soit $\pi : (X, T) \rightarrow (Z, S)$ l'extension de (X, T) à (Z, S) . Nous allons montrer qu'il existe une fonction $g \in C(X, [0, 1]^d)$ telle que $I_g \times \pi$ est un plongement de (X, T) dans $(([0, 1]^d)^{\mathbb{Z}}, \sigma) \times (Z, S)$. Alors, d'après le théorème de Jaworski, il existe d'autre part un plongement I_h de (Z, S) dans $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, où $h \in C(Z, [0, 1])$. Donc on obtiendra un plongement I_f de (X, T) dans $(([0, 1]^{d+1})^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, en posant $f = (g, h \circ \pi)$.

On pose :

$$D_\epsilon = \{f \in C(X, [0, 1]^d) \mid I_f \times \pi \text{ est } \epsilon - \text{injective}\}$$

Montrons que pour tout ϵ , D_ϵ est dense dans $C(X, [0, 1]^d)$. Soit $\tilde{f} \in C(X, [0, 1]^d)$ et $\delta < 0$. Posons :

$$m_{dim} = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{si } m_{dim}(X, T) = 0 \\ m_{dim}(X, T) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $0 < m_{dim} < \frac{d}{16}$.

Soit α un recouvrement ouvert fini de X tel que $\max_{U \in \alpha} \text{diam}(f(U)) < \frac{\delta}{2}$, et $\max_{U \in \alpha} \text{diam}(U) < \epsilon$. Soit $\epsilon' > 0$ tel que $16m_{dim}(1 + 2\epsilon') < d$. Alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$, divisible par 16, tel que $\frac{1}{N}D(\alpha_0^{N-1}) < (1 + \epsilon')m_{dim}$. Soit $\gamma \succ \alpha_0^{N-1}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que $\text{ord}(\gamma) = D(\alpha_0^{N-1})$. Posons $M = \frac{N}{2}$ et $S = \frac{N}{16}$. Alors : $\text{ord}(\gamma) < Sd$.

On peut appliquer le lemme 15 à γ et S . On choisit, pour tout $U \in \gamma$, un point $q_U \in U$ et on définit le N -uplet $v_U = (\tilde{f}(T^i q_U))_{i=0}^{N-1}$. On obtient une fonction $F : X \rightarrow ([0, 1]^d)^N$.

D'autre part, d'après le théorème 7, (Z, S) a la propriété de marqueur. Donc d'après le théorème 6, (Z, S) a la propriété de Rokhlin topologique forte. Donc il existe une fonction continue $n : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'en définissant :

$$E_n = \{x \in S \mid n(T(x)) \neq n(x) + 1\}$$

on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}, E_n \cap T^i(E_n) = \emptyset$$

Posons alors, pour tout x dans X : $\bar{n}(x) = \lceil n(\pi(x)) \rceil \bmod M$, $\underline{n}(x) = \lfloor n(\pi(x)) \rfloor \bmod M$ et $n'(x) = \{n(x)\}$. On définit, pour tout x dans X :

$$f(x) = (1 - n'(x))F(T^{-\underline{n}(x)}x)|_{\underline{n}(x)} + n'(x)F(T^{-\bar{n}(x)}x)|_{\bar{n}(x)}$$

On obtient une fonction $f : X \rightarrow [0, 1]^d$.

Montrons que f est continue. Soit $x \in X$. Si $n(x) \notin \mathbb{Z}$, alors il existe un voisinage de x sur lequel \bar{n} et \underline{n} sont constantes, et n' continue. Donc f est continue en x . Si en revanche $x \in \mathbb{Z}$, fixons $\epsilon > 0$. Alors pour x' suffisamment proche de x , on obtient l'un ou l'autre des cas :

1. $n(x) \leq n(x') < n(x) + \frac{\epsilon}{2}$ (alors $\underline{n}(x') = n(x)$ et $n'(x') < \frac{\epsilon}{2}$)
2. $n(x) - \frac{\epsilon}{2} < n(x') < n(x)$ (alors $\bar{n}(x') = \bar{n}(x) = n(x)$ et $n'(x') > 1 - \frac{\epsilon}{2}$)

Dans le premier cas :

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|F(T^{-n(x)}(x'))|_{n(x)} - F(T^{-n(x)}(x))|_{n(x)}\| + \|n'(x')(F(T^{-\bar{n}(x')}(x'))|_{n(x)+1} - F(T^{-\bar{n}(x)}(x))|_{n(x)})\|$$

On a :

$$\|(F(T^{-\bar{n}(x')}(x'))|_{n(x)+1} - F(T^{-\bar{n}(x)}(x))|_{n(x)})\| \leq 2$$

Donc pour x' suffisamment proche de x , on obtient :

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \epsilon(1 + d)$$

On obtient la même chose dans le second cas. On en déduit que f est continue.

Montrons que $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \epsilon$. Soit $x \in X$. Alors :

$$f(x) \in \text{Conv}(\{F(q_U)|_{\underline{n}(x)} \mid T^{-\underline{n}(x)}x \in U\} \cup \{F(q_U)|_{\bar{n}(x)} \mid T^{-\bar{n}(x)}x \in U\})$$

Or, pour tous $0 \leq n < N$ et $U \in \beta$ tels que $T^{-n}(x) \in U$, comme $F(q_U) = v_U$, on a :

$$\|F(q_U)|_n - \tilde{f}(x)\| = \|v_U|_n - \tilde{f}(x)\| = \|\tilde{f}(T^n q_U) - \tilde{f}(x)\|$$

Comme x et $T^n(q_U)$ sont tous les deux dans $T^n(U)$, on a :

$$\|F(q_U)|_n - \tilde{f}(x)\| \leq \text{diam}(\tilde{f}(T^n(U)))$$

Comme $\beta \succ \alpha_0^{M-1}$ et $n < N$, on peut trouver $V \in \alpha$ tel que $U \subset T^{-n}(V)$. Donc :

$$\|F(q_U)|_n - \tilde{f}(x)\| \leq \max_{V \in \alpha} \text{diam}(\tilde{f}(V)) < \epsilon$$

Finalement, $\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \epsilon$.

Enfin, montrons que $f \in D_\epsilon$. Soient x et y dans X , tels que $(I_f \times \pi)(x) = (I_f \times \pi)(y)$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $f(T^a x) = f(T^a y)$. De plus, comme $\pi \circ T = S \circ \pi$ et $\pi(x) = \pi(y)$, on a pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\pi(T^a x) = \pi(T^a y)$. Donc :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, n(\pi(T^a x)) = n(\pi(T^a y))$$

Comme $\frac{M}{2} - 2 + \frac{3M}{2} = 2M - 2 < N$, il existe au plus un indice $j \in \{-\frac{3}{2}M, \dots, \frac{M}{2} - 2$ tel que $n(T^{j+1}(x)) \neq n(T^j(x)) + 1$. Alors d'après le lemme 19, on peut trouver un indice $r \in \{\frac{3M}{2}, \dots, 0\}$. tel que $\underline{n}(T^r x) \leq \frac{M}{2}$ et pour tout $s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}$, $\underline{n}(T^s x) = \underline{n}(T^r x) + s - r$ et $\bar{n}(T^s x) = \bar{n}(T^r x) + s - r$.

Alors, en posant $\lambda = n'(T^r x)$ et $a = \underline{n}(T^r x)$, l'égalité :

$$\forall s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}, f(T^s x) = f(T^s y)$$

s'écrit :

$$\lambda F(T^{r-a} x)|_a^{a+4S-1} + (1-\lambda)F(T^{r-a-1} x)|_{a+1}^{a+4S} = \lambda F(T^{r-a} y)|_a^{a+4S-1} + (1-\lambda)F(T^{r-a-1} y)|_{a+1}^{a+4S}$$

Il existe donc un ouvert $U \in \gamma$ tel que $T^{r-a}x$ et $T^{r-a}y$ sont dans U . Comme $\gamma \succ \alpha$ et $-N \leq r - a \leq 0$, il existe $V \in \alpha$ tel que $T^{r-a}x$ et $T^{r-a}y$ sont dans $T^{r-a}(V)$ et $T^{r-a}(V)$, d'où x et y sont dans V . On a supposé que $\max_{U \in \alpha} \text{diam}(U) < \epsilon$, donc $d(x, y) < \epsilon$.

Comme ceci est vrai pour tout couple (x, y) , on conclut $f \in D_\epsilon$.

□

3.6 Quelques lemmes techniques

On rassemble ici quelques lemmes utilisés dans les sections précédentes pour établir les résultats de densité.

Lemme 16. *Soit $V = Vect(v_1, v_2, \dots, v_r)$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m de dimension $r > 0$. Soit $s \in \mathbb{N}$. Alors :*

1. *Si $r + s \leq m$ alors pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+s}) \in ([0, 1]^m)^s$ (relativement à la mesure de Lebesgue sur $([0, 1]^m)^s$), $Vect(v_1, v_2, \dots, v_{r+s})$ est de dimension $r+s$.*
2. *Si $r + s \leq m + 1$, pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+s}) \in ([0, 1]^m)^s$, $Vect(v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+s} - v_1)$ est de dimension $r+s-1$.*

Démonstration. Supposons $r + s \leq m$. On procède par récurrence sur s . Pour $s=0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $r + i < m$ et pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+i}) \in ([0, 1]^m)^i$, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_{r+i})$ (qu'on note V_i), est de dimension $r+i$. Alors, pour tout vecteur v_{r+i+1} qui n'appartient pas à $V_i \cap [0, 1]^m$, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_{r+i}, v_{r+i+1})$ est de dimension $r+i+1$. Si on note λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^m$, on a $\lambda(V_i \cap [0, 1]^m) = 0$ car $r + i < m$. Donc pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+i+1}) \in ([0, 1]^m)^{i+1}$, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_{r+i+1})$ est de dimension $r+i+1$.

Finalement, pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+s}) \in ([0, 1]^m)^s$, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_{r+s})$ est de dimension $r+s$. De plus, on en déduit que $Vect(v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+s} - v_1)$ est de dimension $r+s$, ce qui règle une partie du cas 2.

En utilisant ce résultat pour $r+s=m$, on obtient que pour presque tout $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_m) \in ([0, 1]^m)^{m-r}$, $Vect(v_1, v_2, \dots, v_m)$ est de dimension m , d'où $Vect(v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_m - v_1)$ (qu'on note \tilde{V}) est de dimension $m - 1$. On en déduit que $\lambda(\tilde{V} \cap [0, 1]^m) = 0$. Donc de même, pour presque tout vecteur v_{m+1} dans $[0, 1]^m$, $Vect(v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, (v_{m+1} + v_1) - v_1)$ est de dimension m , ce qui permet de conclure. \square

Lemme 17. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{1, 2, \dots, r\}$, telle qu'il n'y a pas de coefficients égaux sur une même ligne ou une même colonne. Alors pour presque tous t_1, t_2, \dots, t_r dans \mathbb{R} , la matrice $A(t_1, t_2, \dots, t_r)$ définie par :*

$$A(t_1, t_2, \dots, t_r)_{i,j} = t_{M_{i,j}}$$

est inversible.

Démonstration. On va montrer que le polynôme à r variables $\det(A(t_1, t_2, \dots, t_r))$ est non nul.

Supposons que 1 apparaît s fois dans M (on peut supposer sans perte de généralité que s est non nul). Alors en écrivant :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

on remarque que $\det(A(t_1, t_2, \dots, t_r))$ est un polynôme en la variable t_1 , dont le coefficient dominant est lui-même un polynôme en les variables t_2, \dots, t_r . Plus précisément, si $s=n$, ce coefficient dominant est égal à 1, sinon c'est le déterminant de la matrice extraite de $A(t_1, t_2, \dots, t_r)$ en supprimant les lignes et les colonnes où t_1 apparaît. Comme cette matrice extraite est de taille

$< n$, on en conclut qu'on pourra procéder par récurrence : si son coefficient est un polynôme non nul, alors le polynôme $\det(A(t_1, t_2, \dots, t_r))$ sera non nul. \square

Lemme 18. Soit $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Soit M une matrice carrée de taille $(2k - 1) \times 2k$ à coefficients dans $\{1, 2, \dots, r\}$, telle qu'il n'y a pas de coefficients égaux sur une même ligne ou une même colonne, et telle que chaque coefficient apparait au plus deux fois dans M . Alors pour presque tous t_1, t_2, \dots, t_r dans \mathbb{R} , les colonnes de la matrice $A(t_1, t_2, \dots, t_r)$ définie par :

$$A(t_1, t_2, \dots, t_r)_{i,j} = t_{M_{i,j}}$$

sont des vecteurs affinement indépendants.

Démonstration. Procédons par récurrence sur k . Supposons qu'il existe un entier k tel que le résultat est vrai pour tout matrice de taille $(2k - 3) \times (2k - 2)$, et montrons le résultat pour tout matrice M de taille $(2k - 1) \times 2k$. Si chaque coefficient de M n'apparait qu'une fois, alors le lemme 16 (cas 2) permet de conclure. Sinon, il existe un entier i qui apparait deux fois. Soit j tel que i n'est pas sur la j -ième colonne. Alors soit N la matrice obtenue à partir de M en retranchant la j -ième colonne à toutes les autres, et en la supprimant. N est carrée de taille $2k \times 2k$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\det(A_N(t_1, t_2, \dots, t_r)) \neq 0$ pour presque tout choix de t_1, t_2, \dots, t_r .

Comme dans le lemme précédent, on considère $\det(\det(A_N(t_1, t_2, \dots, t_r)))$ comme un polynôme en la variable t_i . Alors le coefficient en t_i^2 est le déterminant de la matrice $A_{\tilde{N}}(t_1, t_2, \dots, t_r)$, où \tilde{N} est la matrice obtenue à partir de N en supprimant les lignes et les colonnes contenant i .

Soit \tilde{M} la matrice obtenue à partir de M en supprimant les lignes et les colonnes contenant i . Alors \tilde{M} est une matrice de taille $(2k - 3) \times (2k - 2)$ qui vérifie les propriétés de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, pour presque tous $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_r$ dans \mathbb{R} , les colonnes de $A_{\tilde{M}}(t_1, t_2, \dots, t_r)$ sont des vecteurs affinement indépendants.

De plus, on remarque que \tilde{N} est la matrice obtenue à partir de \tilde{M} en en retranchant la j -ième colonne à toutes les autres, et en la supprimant. On en déduit que $\det(A_{\tilde{N}}(t_1, t_2, \dots, t_r)) \neq 0$ pour presque tout choix de t_1, t_2, \dots, t_r . Donc le polynôme en la variable t_i , $\det(\det(A_N(t_1, t_2, \dots, t_r)))$ est non nul. Finalement, $\det(A_N(t_1, t_2, \dots, t_r)) \neq 0$ pour presque tout choix de t_1, t_2, \dots, t_r . \square

Lemme 19. Soit une fonction $n : X \rightarrow \mathbb{R}$, et $M \in \mathbb{N}$ un entier pair. Supposons qu'il existe au plus un indice $j \in \{-\frac{3}{2}M, \dots, \frac{M}{2} - 2\}$ tel que $n(T^{j+1}(x)) \neq n(T^j(x)) + 1$. Alors on peut trouver un indice $r \in \{\frac{3}{2}M, \dots, 0\}$ tel que :

1. $\lfloor n(T^r x) \rfloor \bmod M \leq \frac{M}{2}$
2. $\forall s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}, \lfloor n(T^s x) \rfloor \bmod M = \lfloor n(T^r x) \rfloor \bmod M + s - r$
3. $\forall s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}, \lceil n(T^s x) \rceil \bmod M = \lceil n(T^r x) \rceil \bmod M + s - r$

Démonstration. L'ensemble $\{-\frac{3}{2}M, \dots, \frac{M}{2} - 2\}$ étant de longueur $M + (M - 1)$, l'un des ensembles : $\{-\frac{3}{2}M, \dots, j\}$, $\{-\frac{3}{2}M, \dots, \frac{M}{2} - 2\}$ est de longueur au moins égale à M . On note $\{a, \dots, b\}$ cet ensemble : on a donc $b - a \geq M - 1$. Par définition de l'indice j , $\{\lfloor n(T^a x) \rfloor, \lfloor n(T^{a+1} x) \rfloor, \dots, \lfloor n(T^b x) \rfloor\}$ est une famille d'au moins M entiers distincts. On peut donc trouver $a \leq k \leq b$ tel que $\lfloor n(T^k x) \rfloor \bmod M = 0$.

Supposons que $b - k + 1 \geq \frac{M}{2}$. Alors posons $r = k$. On a $\lfloor n(T^r x) \rfloor \bmod M = 0$. Soit $s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}$. Alors comme $a \leq s \leq b$, $n(T^s x) = n(T^r x) + s_r$, donc $\lfloor n(T^s x) \rfloor =$

$\lfloor n(T^r x) \rfloor + s - r$. De plus, $0 \leq r - s < \frac{M}{2}$, donc $\lfloor n(T^s x) \rfloor \bmod M = \lfloor n(T^r x) \rfloor \bmod M + s - r$. De même, $\lceil n(T^s x) \rceil \bmod M = \lceil n(T^r x) \rceil \bmod M + s - r$.

Si au contraire $b - k + 1 < \frac{M}{2}$, alors on pose $r = k - \frac{M}{2} - 1$. Alors $a \leq r \leq b$. Comme $a \leq r \leq b$, on a $\lfloor n(T^r x) \rfloor = \lfloor n(T^k x) \rfloor + r - k = -\frac{M}{2} - 1$. Donc on a bien $\lfloor n(T^r x) \rfloor \bmod M \leq \frac{M}{2}$. Soit $s \in \{r, \dots, r + \frac{M}{2} - 1\}$. On a encore $a \leq s \leq b$, donc on peut conclure de la même façon. \square

Références

- [CK05] Michel Coornaert and Fabrice Krieger. Mean topological dimension for actions of discrete amenable groups. *Discrete and continuous dynamical systems*, 13(3) :779–793, August 2005.
- [Coo05] Michel Coornaert. *Dimension topologique et systèmes dynamiques*, volume 14. Société Mathématique de France, 2005.
- [Gut14] Yonatan Gutman. Mean dimension and jaworsky-type theorems. Preprint. arXiv :1208.5248v5, 2014.
- [Jaw74] Allan Jaworski. *The Kakutani-Bebutov theorem for groups*. PhD thesis, University of Maryland, 1974.
- [Lin99] Elon Lindenstrauss. Mean dimension, small entropy factors and embedding theorem. *Publications mathématiques de l’I.H.E.S.*, 89 :227–262, 1999.
- [LW00] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel Journal of Mathematics*, (115) :1–24, 2000.